

Katedra: Katedra aplikované matematiky

Studijní program: B1101 Matematika

Studijní obor: Informatika se zaměřením na vzdělávání
Matematika se zaměřením na vzdělávání

Letíme a díváme se Flying and viewing

Bakalářská práce: 13-FP-KAP- 001

Autor:

Lenka Vaňková

Podpis:

.....

Vedoucí práce: RNDr. Martina Šimůnková Ph. D.

Konzultant:

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	Příloh
69	0	9	0	14	7

V Liberci dne: 26. 4. 2013

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: Lenka Vaňková
Osobní číslo: P10000563
Studijní program: B1101 Matematika
Studijní obory: Informatika se zaměřením na vzdělávání
Matematika se zaměřením na vzdělávání
Název tématu: Letíme a díváme se
Zadávající katedra: Katedra aplikované matematiky

Zásady pro vypracování:

Studentka nastuduje stereografickou projekci a Lorentzovu transformaci a odvodí vztahy mezi stereografickými projekcemi poloh hvězd ve dvou soustavách vzájemně se pohybujících rovnoměrně přímočaře. Dále nastuduje vlastnosti lineárně lomené funkce komplexní proměnné, konkrétně jak tato funkce zobrazuje kružnice a přímky, a že je toto zobrazení jako zobrazení v rovině konformní. Dále ukáže, že výše zmíněné zobrazení projekcí poloh hvězd je v Gaussově rovině lineárně lomenou funkcí a pro vybrané podgrupy Lorentzovy grupy nalezne jim odpovídající podgrupy lineárně lomených funkcí. Dovolí-li to časové možnosti, nastuduje maticové reprezentace grup a ukáže vztah výše zmíněných lineárně lomených funkcí s maticovou reprezentací Lorentzovy grupy.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: tištěná

Seznam odborné literatury:

Litzman, Otto a Milan SEKANINA: Užití grup ve fyzice, Academia, Praha, 1982.

PRIVALOV, Ivan, Ivanovič: Analytické funkce, Academia, Praha, 1955.

MANIN, Jurij, I: Matematika i fyzika, kapitola 4: Prostorčas jako fyzikální systém, Znanie, Moskva, 1979.

RYBIČKA, Jiří: Latex pro začátečníky, Brno: Konvoj, 2003.

PESKOVÁ, Eva a Hana KROPÁČKOVÁ. Přehled středoškolské fyziky: Fyzika, univerzální příručka pro maturanty a uchazeče o studium na vysokých školách. Praha: Albra, 1995.

LEPIL, Oldřich, Milan BEDNÁŘÍK a Radmila HÝBLOVÁ. Fyzika II pro střední školy. Praha: Prometheus, 1993.

http://www.orloj.eu/cs/stereograficka_projekce.htm

mat.fsv.cvut.cz/lakoma/KOGG/Stereograficka_projekce2008.pdf

Vedoucí bakalářské práce:

RNDr. Martina Šimůnková, Ph.D.

Katedra aplikované matematiky

Datum zadání bakalářské práce:

24. května 2012

Termín odevzdání bakalářské práce:

27. dubna 2013

doc. RNDr. Miroslav Braňou, CSc.

děkan

L.S.

doc. RNDr. Miroslav Braňou, CSc.

vedoucí katedry

V Liberci dne 20. dubna 2012.

Čestné prohlášení

Název práce: Letíme a díváme se

Jméno a příjmení autora: Lenka Vaňková

Osobní číslo: P10000563

Byl/a jsem seznámen/a s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména § 60 – školní dílo.

Prohlašuji, že má bakalářská práce je ve smyslu autorského zákona výhradně mým autorským dílem.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracoval/a samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím bakalářské práce a konzultantem.

Prohlašuji, že jsem do informačního systému STAG vložil/a elektronickou verzi mé bakalářské práce, která je identická s tištěnou verzí předkládanou k obhajobě a uvedl/a jsem všechny systémem požadované informace pravdivě.

V Liberci dne: 26. 04. 2013

Lenka Vaňková

Anotace

Bakalářská práce zjišťuje, na jakých místech spatříme hvězdy, poletíme-li vesmírem rychlostí blízkou rychlosti světla. Řeší otázky velikosti úhlů mezi křivkami, zda zůstávají zachovány, nebo se mění. Tutéž otázku řeší i vzhledem ke vzdálenostem mezi body. Dále popisuje lineární lomenou funkci komplexní proměnné a hlavně zobrazení komplexních čísel na Riemannově sféře v komplexní rovině. Vzhledem k uvažování relativistických rychlostí, je zde zahrnuta i část Einsteinovy speciální teorie relativity a Lorentzova transformace, která byla zahrnuta i do praktické části.

Klíčová slova: komplexní čísla, konformní zobrazení, lineární lomená funkce, Lorentzova transformace, podgrupy Lorentzovy grupy, Speciální teorie relativity, stereografická projekce

Annotation

My thesis analyses locations where stars can be observed while flying through the universe close to the speed of light. It discusses the question whether sizes of angles contained between curves change or remain the same and so does for distances between certain points. It also describes linear fraction function of a complex variable or complex number mapping on Riemann's sphere in the conformal map. Considering relative velocity, the thesis incorporates special relativity or Lorentz transformations which are employed in the applied part.

Keywords: complex numbers, conformal map, linear fractional function (bilinear function), Lorentz transformation, subgroups of Lorentz group, special relativity, stereographic projection

Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala především paní RNDr. Martině Šimůnkové, Ph.D. za cenné rady, věcné připomínky a obrovskou trpělivost při vedení mé bakalářské práce. Dále bych pak ráda poděkovala celé své rodině a svému příteli, za psychickou podporu a pomoc při úpravách.

Obsah

Úvod	11
1 Speciální teorie relativity	12
1.1 Relativnost současnosti	12
1.2 Důsledky speciální teorie relativity	12
1.2.1 Dilatace času	12
1.2.2 Kontrakce délek	13
1.2.3 Skládání rychlostí	13
2 Lorentzova transformace	14
2.1 Předpoklady	14
2.2 Odvození	15
3 Komplexní čísla	18
3.1 Geometrické zobrazení	18
3.2 Zobrazení komplexních čísel na sféře	19
3.2.1 Vzorce stereografické projekce	20
3.2.2 Základní vlastnost stereografické projekce	22
3.2.3 Zachování úhlů	23
3.2.4 Geometrické významy	24
3.3 Konformní zobrazení	27
4 Lineární funkce komplexní proměnné	28
4.1 Celistvá lineární funkce	28
4.2 Lomená funkce	29
4.3 Obecná lineární funkce	29
4.4 Kruhovatá vlastnost lineární funkce	30
4.5 Invariant lineární funkce	31
4.6 Invariantnost dvojice vzájemně inverzních bodů	33
4.7 Různé typy lineárních transformací	33
5 Praktická část	36
5.1 Lorentzova transformace a stereografická projekce	37
5.1.1 Pohyb ve směru osy z	39
5.1.2 Pohyb ve směru osy x	41
5.1.3 Pohyb ve směru osy y	45
5.2 Vlastnosti vycházející z předchozích kapitol	46

5.2.1	Samodružné body	47
5.3	Rotace kolem jednotlivých os	52
5.3.1	Rotace kolem osy z	52
5.3.2	Rotace kolem osy x	53
5.3.3	Rotace kolem osy y	55
5.4	Zkouška správnosti kapitoly 5.1	55
5.4.1	Pohyb ve směru osy x	56
5.4.2	Pohyb ve směru osy y	57
5.5	Skládání transformací	58
5.5.1	Skládání transformací ve směru osy z	58
5.5.2	Skládání transformací ve směru osy x	59
5.5.3	Lorentzovy podgrupy	60
6	Letíme a díváme se	62
7	Rešerše	64
7.1	Fyzika pro gymnázia - Speciální teorie relativity	64
7.2	Přehled středoškolské fyziky	64
7.3	Fyzika II. pro střední školy	64
7.4	Přehled středoškolské fyziky. Fyzika, univerzální příručka pro maturanty a uchazeče o studium na vysokých školách	64
7.5	Odmaturuj! z fyziky	64
7.6	Fyzika v kostce	65
7.7	Albert Einstein - Teorie relativity pro každého	65
7.8	Shrnutí	65
	Závěr	66
	Seznam použitých zdrojů	67
	Seznam příloh	69

Seznam obrázků

1	Inerciální soustavy - pohyb ve směru osy x	14
2	Komplexní proměnná	19
3	Zobrazení bodu z Riemannovy sféry do Gaussovy komplexní roviny	20
4	Řez sféry rovinou	23
5	Zachování úhlů mezi křivkami	24
6	Samodružné body 0 a nekonečno	48
7	Samodružné body $-1, 1$	50
8	Samodružné body $-i, i$	51
9	Transformace Velkého vozu	63

Úvod

Bakalářská práce je inspirována článkem Jurije I. Manina *Prostoročas jako fyzikální systém*, který pojednává o rozložení a postavení hvězd ve vesmíru, poukazuje na skutečnost přirozené struktury nebe, kterou je dle něj Riemannova sféra. Dále uvádí, že k výpočtu jednotlivých poloh hvězd lze užít lineární lomenou funkci komplexní proměnné. Úvahou řeší otázku zobrazení hvězd, pokud bychom je pozorovali z vesmírné lodi letící rychlostí blízkou rychlosti světla. [1, s. 170–171]

Několik prvních kapitol práce popisuje teorii potřebnou ke zpracování praktické části. Jedná se o stereografickou projekci, speciální teorii relativity, Lorentzovu transformaci, komplexní čísla i s jejich zobrazováním nebo o lineárně lomenou funkci. Tyto teoretické a obecné informace pak aplikujeme na výsledky výpočtů, získáme díky nim lepší představu o tom, co znázorňují.

Praktická část je založená na výpočtech a na utváření z nich vycházejících závěrů. Jedním z výpočtů zjistíme chování hvězd při jejich zobrazení z jejich „nebeské“ sféry do roviny, druhým, které vzdálenosti se mezi nimi zkracují, prodlužují či zůstávají neměnné. Dalším velice zajímavým problémem je, dají-li se Lorentzovy transformace ve třech základních směrech zapsat pomocí jednoho jediného směru. Závěrečná otázka, podle které se jmenuje celá bakalářská práce, řeší, jak se pozorovateli budou zobrazovat hvězdy, poletí-li mezi nimi v raketě letící rychlostí blízkou rychlosti světla.

1 Speciální teorie relativity

Speciální teorie relativity byla sepsána Albertem Einsteinem a je známá od roku 1905. Princip relativity platí pro mechanické, optické i elektromagnetické děje, byl tím odstraněn problém Newtonových vzorců na skládání rychlostí s možností překročení rychlosti světla. Hlavní myšlenky jsou uvedeny ve dvou Einsteinových postulátech.

První Einsteinův postulát: Všechny inerciální soustavy jsou pro popis fyzikálních dějů rovnocenné.

Druhý Einsteinův postulát: Ve všech inerciálních soustavách má rychlost světla c ve vakuu stejnou velikost, a to ve všech směrech a nezávisle na vzájemném pohybu světelného zdroje i pozorovatele.

1.1 Relativnost současnosti

Použijeme-li hypotézu, že se světlo šíří nekonečnou rychlostí, mohli bychom pak libovolný děj sledovat z libovolného místa a ve stejném čase. Čas by měl absolutní význam, pokud bychom předpokládali, že dvě nesoumísné situace nastaly současně.

Použijeme příklad vesmírné lodi, kde jsou umístěny dvojce synchronizované hodiny. Uprostřed mezi nimi je umístěn zdroj světla. Pokud se loď rozletí rychlostí blízkou rychlosti světla, nastanou rozdílné situace pro 1. pozorovatele v raketě a pro 2. pozorovatele, oproti němuž se loď pohybuje. Vyšleme světelný paprsek k oběma hodinám, pro 1. pozorovatele paprsky dopadnou na hodiny ve stejnou dobu, pro 2. pozorovatele však na hodiny v zadní části lodi dopadne paprsek dříve, díky přibližování hodin k vyslanému paprsku, přední hodiny se však naopak paprsku vzdalují. Proto k nim světlo doletí později.

Tento příklad přináší jednoznačný závěr. Současnost nesoumísných událostí je relativní, a to právě díky konečné rychlosti světla. Běh času je pojem relativní, nemůžeme ho chápat absolutně.

1.2 Důsledky speciální teorie relativity

Důsledků plynoucích z teorie relativity je několik, nás zajímají kontrakce délek a skládání rychlostí.

1.2.1 Dilatace času

Čas v soustavě, která se oproti druhé pohybuje, plyne jinak, než v soustavě, vzhledem k níž je pozorovatel v klidu. Vezměme dvě trubice o stejné délce l . Na jednom konci obou trubic je umístěn zdroj světla a na konci druhém světelný detektor. První trubice zůstává v klidu a světlo tak urazí dráhu l za čas $\Delta t_0 = \frac{l}{c}$, nebo-li $l = \Delta t_0 c$, kdy c je rychlost světla. Pohybuje-li se druhá trubice

rychlostí v ve směru kolmém k ose trubice, záblesk urazí cestu $c\Delta t$ a trubice zároveň urazí trasu $v\Delta t$. Spojíme-li údaje z první a druhé trubice, vznikne nám rovnostranný trojúhelník a pro zjištění vztahů mezi Δt_0 a Δt použijeme Pythagorovu větu.

$$c^2(\Delta t)^2 = v^2(\Delta t)^2 + c^2(\Delta t_0)^2$$

Po úpravě získáváme vzorec:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Z toho plyne následující závěr. Pohybuje-li se loď (nebo cokoli či kdokoli jiný) nějakou rychlostí, vidí pozorovatel lodi, vzhledem k němuž se loď pohybuje, plynutí času na ní pomaleji. Rozdíl zpozorujeme v případě, kdy jmenovatel ve vzorci se blíží nule, tedy pokud se rychlost našeho pohybu blíží rychlosti světla.

1.2.2 Kontrakce délek

Kontrakci délek si ukážeme na příkladu pohybující se tyče s délkou l . Osa tyče má směr, kterým se pohybuje vztažná soustava. Podobným pokusem, jako u dilatace času, přijdeme na kontrakci délky tyče. V klidné soustavě má tyč délku l_0 , délka tyče v soustavě pohybující se velkou rychlostí v je dána následujícím vztahem:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Tyč v pohybující se soustavě je tedy kratší, ostatní rozměry pak zůstanou stejné.[2, s. 229–236]

1.2.3 Skládání rychlostí

V klasické mechanice skládáme jednotlivé rychlosti sečtením. Vzorce $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$ a $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$ platí pro nízké rychlosti, \vec{u} je vektor rychlosti v soustavě S a \vec{u}' je vektor rychlosti \vec{v} v soustavě S' .

Vzhledem ke **Druhému Einsteinovu postulátu** je pak třeba vztahy upravit. Einstein odvodil **relativistický zákon skládání rychlostí**: „*Když se těleso pohybuje ve vztažné soustavě S' rychlostí u' v kladném směru osy x a současně se vztažná soustava S' pohybuje vzhledem k jiné soustavě S rychlostí v ve stejném směru, pak se těleso vzhledem k soustavě S pohybuje rychlostí u , pro kterou platí následující vzorec.*“

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$

Jak vidíme, při malých rychlostech, kterými se běžně pohybujeme je hodnota jmenovatele téměř rovna jedné. Rozdíl pocítíme až v případech, kdy se rychlost výrazně přibližuje rychlosti světla. To se jmenovatel blíží dvěma a výsledná rychlost je tak téměř poloviční.[3, s. 299].

2 Lorentzova transformace

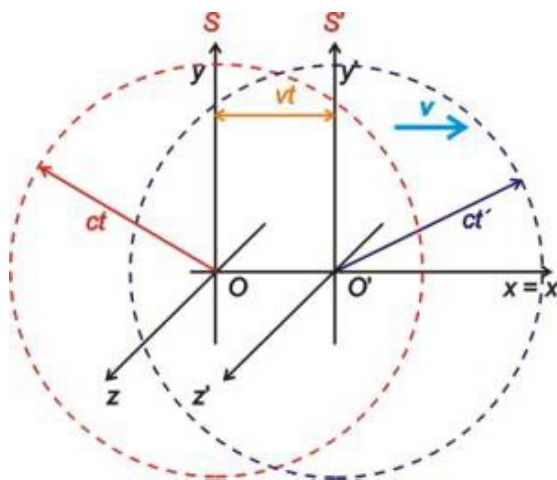
S Einsteinovu teorií souvisí transformace Hendrika Antoona Lorentze (1853–1928), který se zabýval vztahem souřadnic dvou vztažných soustav, kdy první se oproti druhé pohybuje rychlostí blízkou rychlosti světla. Na rozdíl od Galileovy transformace uvažoval, že v každé soustavě plyne čas odlišnou rychlostí. Transformační rovnice odvodil v roce 1904.

2.1 Předpoklady

Pokud tyto rovnice odvozujeme, musíme při přechodu mezi inerciálními soustavami S a S' dodržovat jistá pravidla:

1. „čas a všechny souřadnice musí být v první mocnině, transformační rovnice musí být lineární;“
2. „transformační koeficient musí být stejný pro obousměrný přechod mezi soustavami S a S' ;“
3. „Galileiho transformace musí být přechodem pro rychlosti zanedbatelné oproti rychlosti světla.“

Tyto rovnice jsou sestaveny ze souřadnic x, y, z, t dané události U a souřadnic druhé vztažné soustavy x', y', z', t' události U' . Dále počítáme s tím, že v počátečním okamžiku $t = t' = 0$ a počátky obou souřadnicových systémů splývají $0 = 0'$. Jak bylo zmíněno v předcházející části týkající se Teorie relativity, světlo se všude šíří stejnou rychlostí. To znamená, že za čas t se světlo rozšíří do vzdálenosti ct (resp. t').



Obrázek 1: Inerciální soustavy - pohyb ve směru osy x

2.2 Odvození

Odvodíme rovnice pouze ve směru osy x , zbylé transformační rovnice (ve směrech os y, z) by se odvodily analogicky. Díky předpokladu, že Lorentzova transformace přechází v Galileovu, budeme, pro zjednodušení odvození vztahů pro pohyb ze soustavy S do S' , předpokládat následný tvar rovnice:

$$x' = k(x - vt), \quad (2.1)$$

tato rovnice je odvozena na základě 1. postulátu. Obecně platí: $x' = ax + bt$, hodnotě $x' = 0$ odpovídá $0 = ax + bt \Rightarrow x = -\frac{b}{a}t$. Dosadíme-li takto vyjádřené x výsledek do rovnice (2.1), za stejné podmínky $x' = 0$, dostaneme $0 = k(-\frac{b}{a}t - vt) \Rightarrow 0 = kt(-\frac{b}{a} - v) \Rightarrow v = -\frac{b}{a}$, vyjádříme $x = vt \Rightarrow x - vt = 0$. Pro $x' = 0$ tedy rovnice vypadá $x' = x - kt$, jeli $x' \neq 0$ doplníme rovnici o konstantu k a získáváme tak výše uvedenou rovnici (2.1). Protože se nepohybujeme jiným směrem, budou mít osy y, z transformace:

$$y' = y; \quad z' = z.$$

Rovnice převádějící souřadnice opačně, však musí mít stejný tvar, k tomu však stačí obrácené znaménko v rovnici, čímž bereme v úvahu opačný směr.

$$x = k(x' + vt') \quad (2.2)$$

Nyní spojíme vztah (2.1) a (2.2)

$$\begin{aligned} x &= k(k(x - vt) + vt') \Rightarrow x = k(kx - kv t + vt') \\ x &= k^2(x - vt) + kv t'. \\ kv t' &= x - k^2(x - vt) \Rightarrow kv t' = x(1 - k^2) + k^2 vt \end{aligned} \quad (2.3)$$

Tady vidíme, že t a t' jsou odlišné, pro $k \neq 1$. Proto nyní ze vztahu (2.3) vyjádříme t' .

$$t' = kt + \left(\frac{1 - k^2}{kv} \right) x. \quad (2.4)$$

Tyto získané vzorce (2.1–2.4) nám dávají transformaci, která splňuje podmínky výše zmíněného 1. Einsteinova postulátu. Postupně se dostáváme k odvození k z 2. předpokladu předchozí kapitoly. Připomeňme předpoklad, že počátky obou soustav S a S' se v čase $t = 0$ nachází ve stejném bodě, tedy i $t' = 0$. Z tohoto bodu a v tomto okamžiku tedy vyšleme světelný paprsek, v každé soustavě budou pozorovatelé měřit, jakou rychlostí se světlo šíří. Ta musí být u obou pozorovatelů zjištěna

stejná:

$$x = ct \quad (2.5)$$

v soustavě S a v soustavě S' to bude analogický vztah:

$$x' = ct'. \quad (2.6)$$

Nyní ve vztahu (2. 6) nahradíme x' a t' vztahy (2.1) a (2.4). Dostáváme tak vztah:

$$k(x - vt) = ckt + \left(\frac{1 - k^2}{kv} \right) cx, \quad (2.7)$$

který upravíme vzhledem k x :

$$x = \frac{ckt + vkt}{k - \left[\frac{(1 - k^2)}{kv} \right] c} = ct \left\{ \frac{k + \frac{vk}{c}}{k - \left[\frac{(1 - k^2)}{kv} \right] c} \right\} \quad (2.8)$$

Pokud chceme pro x najít výraz shodný se vztahem (2. 5), musí platit:

$$\left[\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - (k^{-2} - 1) \frac{c}{v}} \right] = 1. \quad (2.9)$$

Tento vztah upravíme:

$$1 + \frac{v}{c} = 1 - (k^{-2} - 1) \frac{c}{v} \Rightarrow vc + v^2 = vc - \frac{1}{k^2} - 1c^2 \Rightarrow 1 = \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \frac{c^2}{v^2} \Rightarrow \frac{1}{k^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

a dostáváme faktor k :

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.10)$$

Tento faktor se také nazývá **Lorentzovým faktorem** a značí se β . Dosadíme-li ho do rovnic (2.1) a (2.4), získáme úplnou transformaci mezi výsledky ze soustavy S k výsledkům v inerciální soustavě S' :

$$x' = \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.11)$$

$$y' = y \quad (2.12)$$

$$z' = z \quad (2.13)$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.14)$$

Takto tedy vypadají vztahy pro pohyb inerciální soustavy ve směru osy x . Pokud bychom se chtěli pohybovat směry os y nebo z , pouze upravíme danou souřadnici a zbylé dvě budou opět neměnné. U času t uvedeme osu, v jejímž směru se pohybujeme. [4][5][3, s. 298]

Tyto rovnice využijeme později ve vlastní části, kdy převádíme souřadnice hvězd do dvou-rozměrného prostoru inerciální soustavy.

3 Komplexní čísla

Další teorií, která je potřebná ke správnému zobrazení hvězd do roviny, jsou právě komplexní čísla. Jak jsme již dříve zmínili, hvězdy se nachází na Riemannově sféře a právě body z této sféry se zobrazují do komplexní roviny.

Komplexní čísla jsou výrazy skládající se z reálné a imaginární části, mají tvar

$$z = a + bi, \quad (3.1)$$

pro číslo i platí $i^2 = -1$. Část a se nazývá reálnou částí, b je částí imaginární a i je imaginární jednotkou. Rovnost komplexních čísel nastává v případě, že se sobě rovnají reálné a imaginární části. K číslu $z = a + bi$ je **opačné** číslo $z = -a - bi$. $\bar{z} = a - bi$ je číslo **komplexně sdružené**, liší se pouze část reálná, část imaginární má opačnou hodnotu. Mezi komplexně sdruženými čísly platí vztah:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Absolutní hodnotu, nebo-li **modul** komplexního čísla získáme:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

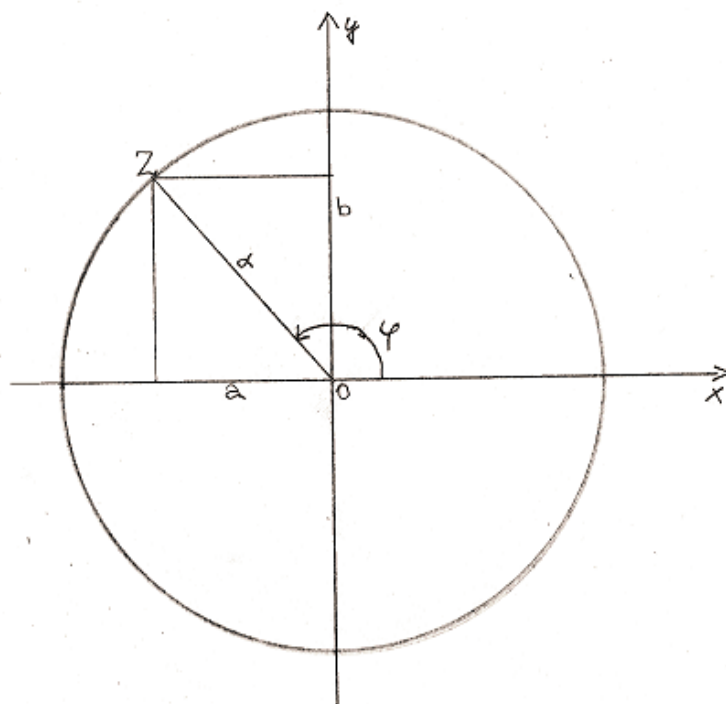
Zápis používaný doposud, se nazývá **algebraickým** zápisem komplexního čísla. Komplexní čísla se však dají zapsat i ve tvaru **goniometrickém**. Tady využijeme jeho absolutní hodnotu a dále pak jeho argument φ , značící velikost orientovaného úhlu, který svírá kladná poloosa reálných čísel s úsečkou $0Z$, kdy 0 je počátek souřadnicového systému a Z značí komplexní číslo zobrazené v rovině. Goniometrický zápis tak vypadá následovně:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (3.2)$$

Následně platí vztahy $\sin \varphi = \frac{b}{r}$ a $\cos \varphi = \frac{a}{r}$. Odvození tohoto tvaru je dobře vidět v geometrickém znázornění komplexního čísla. [7][6] Komplexní číslo lze vyjádřit také pomocí „Eulerova čísla“ za použití tzv. **polárních souřadnic**. Jsou to jedny z křivočarých souřadnic, využívají argument $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$ a modul $r \in \mathbb{R}^*$. Komplexní číslo má následně tvar $z = re^{\phi i}$.

3.1 Geometrické zobrazení

V předchozí kapitole zmiňujeme, že komplexní číslo lze také zakreslit do roviny. Souřadnice z je komplexní souřadnicí tohoto bodu. Na osu x nanášíme reálnou a na osu y imaginární část komplexního čísla, x je tedy reálnou a y je imaginární osou. Jak vidíme z obrázku, r znázorňuje délku vektoru $0z$, která odpovídá absolutní hodnotě komplexního čísla, čísla se shodným modulem



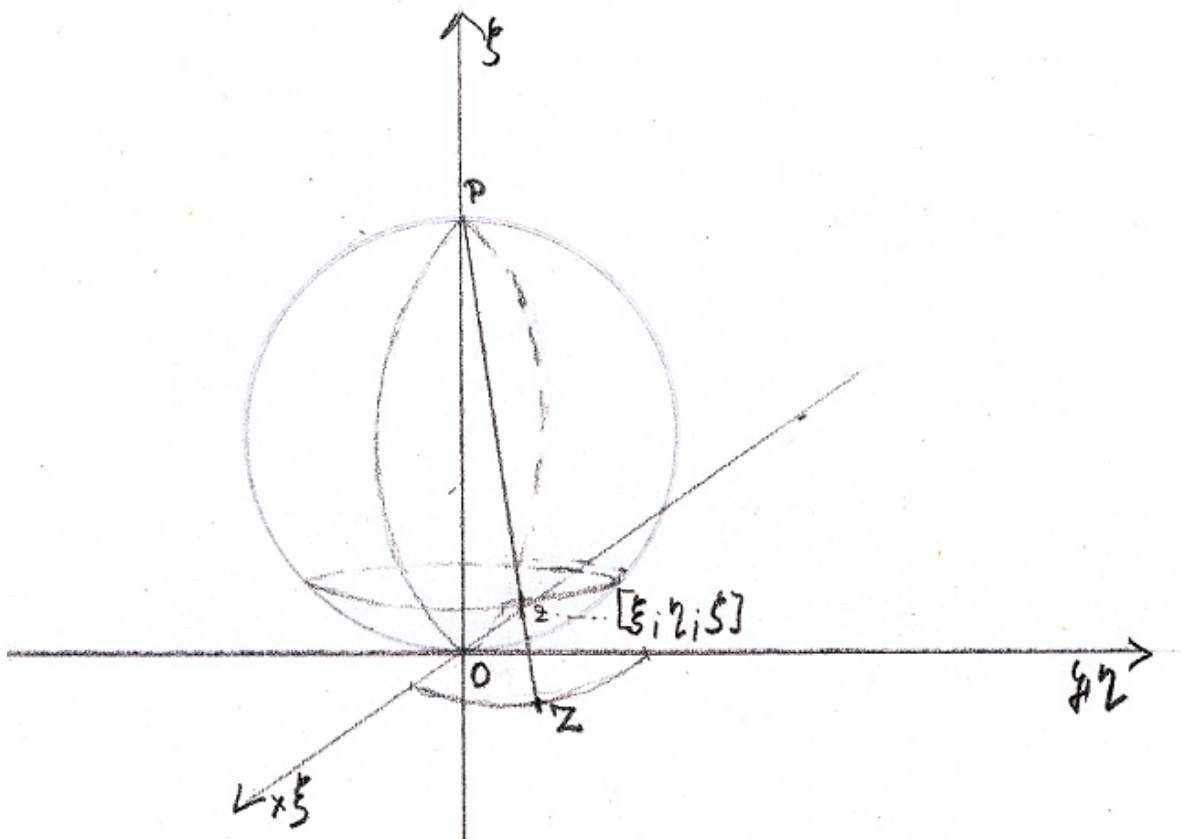
Obrázek 2: Komplexní proměnná

jsou uspořádána na kružnici. Argument φ určuje, jaký úhel spolu svírají vektor Oz a kladná reálná poloosa. Při kladném argumentu se pohybujeme proti směru hodinových ručiček, při záporném pak po směru. Pro každý argument φ má z nekonečně mnoho možných hodnot, pokud bychom je všechny pospojovali, dostaneme polopřímku začínající v počátku. Pro hodnotu z pak existuje nekonečně mnoho argumentů φ periodicky se opakujících po celočíselných násobcích 2π , spojíme-li všechna z se stejným modulem, avšak odlišným argumentem, získáváme kružnici. Geometricky lze provádět i základní matematické operace, jako je sčítání, násobení či nalezení inverzního prvku.[7, s. 23–28]

3.2 Zobrazení komplexních čísel na sféře

Zobrazíme komplexní čísla na sféru. Tato kulová plocha má s rovinou (nazvěme ji pro přehlednost ρ) jeden společný bod, nazvěme ho O . Sféra má průměr OP , který je kolmý na rovinu ρ . Bod P nazvěme pólem. Všechna komplexní čísla zobrazíme z ρ na sféru tak, že bod $z \in \rho$ propojíme s bodem P . Průsečík přímky Pz a sféry je jedinečným zobrazením bodu z na sféře. Každý bod sféry kromě pólu P zobrazuje nějaké komplexní číslo v rovině ρ . Mimo bod P je toto zobrazení jednoznačné, a zobrazuje celou množinu komplexních čísel.

Opačným postupem, tedy propojením bodu P a sférického bodu z , lze zobrazit čísla ze sféry do



Obrázek 3: Zobrazení bodu z Riemannovy sféry do Gaussovy komplexní roviny

komplexní roviny. Zobrazíme tak všechna čísla, právě až na bod P , jehož „zobrazovací“ přímka je rovnoběžná s rovinou komplexních čísel, tedy v žádném místě se neprotne. Bod P tak lze považovat za znázornění nekonečna na sféře. [7, s. 30–32]

3.2.1 Vzorce stereografické projekce

Známe-li komplexní číslo, jaký je vztah mezi jeho umístěním v rovině a na sféře? Systém souřadnic na výše zmiňované sféře nazveme $\xi\eta\zeta$ tak, že osa x se bude překrývat s osou ξ , osa y s osou η , osa ζ pak má směr průměru OP . Pro zjednodušení vezmeme $|OP| = 1$. V rovině komplexní číslo zobrazíme pomocí souřadnic x, y , na číselné sféře ho zobrazíme pod souřadnicemi ξ, η, ζ . Střed sféry leží v bodě $S = [0; 0; \frac{1}{2}]$, tato sféra s poloměrem $r = \frac{1}{2}$ má tak následující rovnici:

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \xi^2 + \eta^2 = \zeta(1 - \zeta). \quad (3.3)$$

Mějme 3 body, které náležejí téže přímce a jejich souřadnice jsou $[0; 0; 1], [\xi; \eta; \zeta], [x; y; 0]$. Tím, že body náležejí jedné přímce, mají všechny vektory, které se z nich dají zkombinovat, stejný směr.

Velkosti vektorů $([\xi; \eta; \zeta], [0; 0; 1])$ a $([x; y; 0], [0; 0; 1])$ jsou v určitém poměru, to nám umožňuje vyjádřit jeden vektor pomocí druhého za použití nějaké konstanty a , kterou použijeme k úpravě. Vyjádření jednoho vektoru druhým, mají-li stejný směr, má následující tvar:

$$a([x; y; 0] - [0; 0; 1]) = [\xi; \eta; \zeta] - [0; 0; 1].$$

Následně rozložíme vzdálenost dvou bodů na vzdálenosti jednotlivých, vzájemně souvisejících souřadnic:

$$a(x - 0) = \xi - 0$$

$$a(y - 0) = \eta - 0$$

$$a(0 - 1) = \zeta - 1.$$

Nyní z každé rovnice vyjádříme konstantu a .

$$a = \frac{\xi - 0}{(x - 0)}, a = \frac{\eta - 0}{(y - 0)}, a = \frac{\zeta - 0}{(0 - 1)}$$

Z těchto zlomků je dobře viditelná následující rovnost poměrů vzdáleností mezi všemi třemi souřadnicemi daných bodů, kterou jsme chtěli odvodit:

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1} \quad (3.4)$$

Pomocí těchto rovností můžeme postupně vyjádřit jednotlivé vztahy mezi x, y a ξ, η, ζ :

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}, \quad (3.5)$$

také lze obě souřadnice vyjádřit ve tvaru komplexních čísla z :

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}. \quad (3.6)$$

Pro obrácené vzorce, tedy pro vyjádření $\xi\eta\zeta$ pomocí x, y vzorce upravíme:

$$x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} \quad (3.7)$$

tuto rovnici upravíme za pomoci vztahu (3. 4):

$$x^2 + y^2 = \frac{\zeta}{1 - \zeta}$$

$$(x^2 + y^2)(1 - \zeta) = \zeta$$

$$(x^2 + y^2) - \zeta(x^2 + y^2) = \zeta$$

$$(x^2 + y^2) = \zeta + \zeta(x^2 + y^2)$$

$$(x^2 + y^2) = \zeta(1 + x^2 + y^2)$$

z toho pak vyjádříme ζ :

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \quad (3.8)$$

zbylé souřadnice se ze vztahů určí takto:

$$\xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2} \quad (3.9)$$

$$\eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2} \quad (3.10)$$

Tyto poslední tři rovnice (3.9), (3.10) a (3.11) dohromady jednoznačně určují, jaké souřadnice na sféře získá bod převáděný z komplexního čísla, čili z naší roviny.[7, s. 32–33]

3.2.2 Základní vlastnost stereografické projekce

Základní důležitou vlastností stereografické projekce je zobrazování rovinných kružnic na sférické kružnice a naopak. Je tu třeba upřesnit pojem kružnice, její význam je nutno chápat v širokém smyslu, to znamená brát i přímku jako kružnici s nekonečným poloměrem. Vezměme obecnou rovnici kružnice nacházející se v rovině xy , její tvar je následovný:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad (3.11)$$

A, B, C, D jsou reálná čísla. Jak vidíme, pokud se $A = 0$, rovnice kružnice přechází v přímku. Máme-li najít na kouli hledanou kružnici, použijme vztahy (3.6), (3.8) a nahraďme x, y jejich sférickým vyjádřením souřadnicemi ξ, η, ζ :

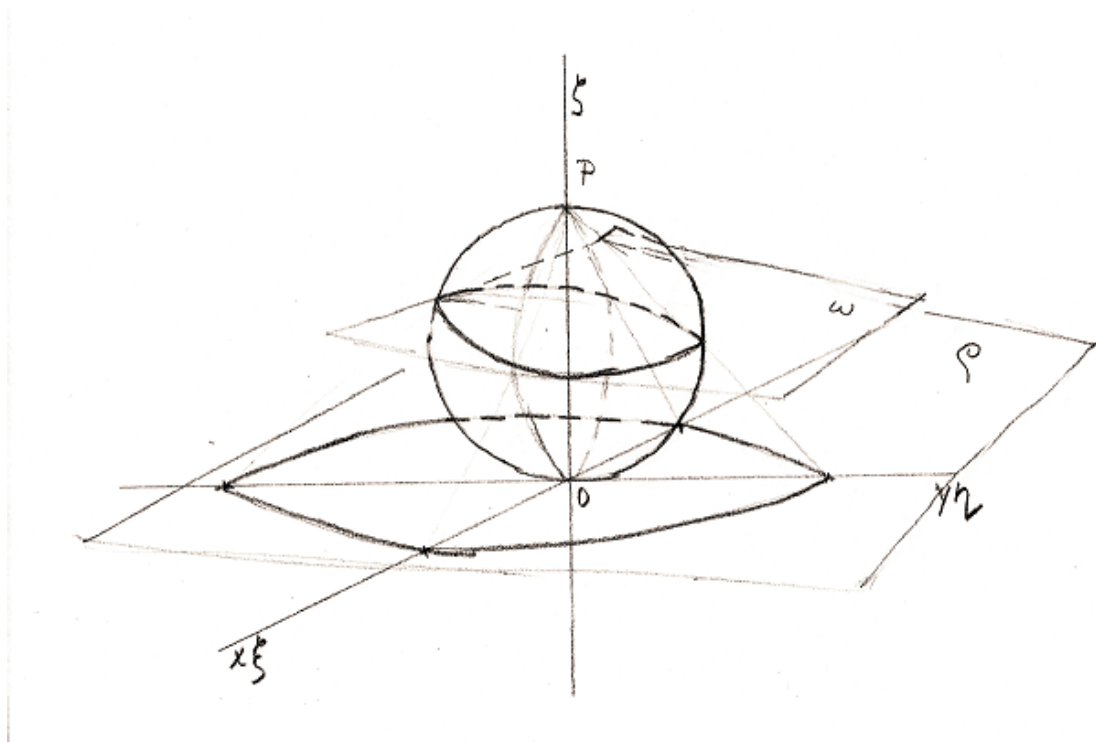
$$A \frac{\zeta}{1 - \zeta} + B \frac{\xi}{1 - \zeta} + C \frac{\eta}{1 - \zeta} + D = 0$$

roznásobíme-li celý výraz jmenovatelem, dostáváme rovnici:

$$B\xi + C\eta + (A - D)\zeta + D = 0, \quad (3.12)$$

která nám vyjadřuje rovinu, jejíž body $[\xi; \eta; \zeta]$ splňují rovnici roviny (3.13) i rovnici sféry (3.4). Každá kružnice sféry přejde v kružnici v rovině, A, B, C, D jsou libovolná čísla a díky nim lze vyjádřit libovolnou rovinu.

Sférická kružnice přejde v rovinnou kružnici tehdy, pokud je rovina, nazvěme ji třeba ω ,



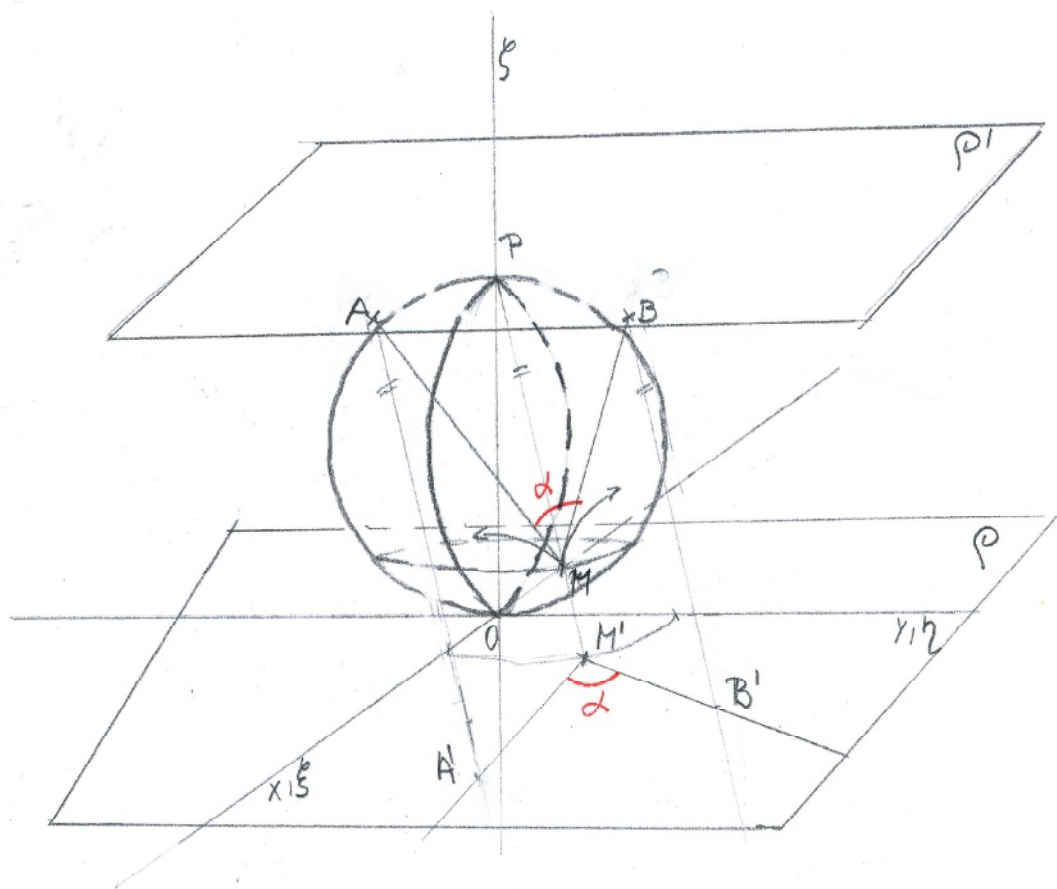
Obrázek 4: Řez sféry rovinou

kolmá na výše zmiňovanou přímku OP , která je kolmá na zobrazovací rovinu ρ , tzn. rovina ω je rovnoběžná s komplexní rovinou ρ . Tyto zobrazené kružnice mají společný střed v bodě O . Pokud je P jediným bodem dotyku sféry a roviny ω , je zobrazením bod, který však leží v ∞ . Nastane-li případ, kdy jsou roviny ρ a ω na sebe kolmé a navíc bod $P \in \omega$, jsou zobrazením těchto kružnic přímky procházející počátkem O , nejsou-li roviny kolmé, ale stále platí druhá podmínka, odpovídají kružnicím přímky v rovině ρ . Nejobecnějším případem pak je libovolný řez sféry rovinou ω , kdy rovina s OP svírá libovolný úhel a průnik přímky OP s rovinou ω neleží uvnitř sféry. Řez se zobrazí jako kružnice v rovině ρ . [7, s. 33–34]

3.2.3 Zachování úhlů

Další vlastností související se zobrazováním mezi koulí a rovinou je zachovávání úhlů, které není úplně zřejmé.

Mějme na kouli dvě křivky protínající se v bodě Z (viz. Obrázek 5). Tečny těchto křivek svírají v tomto bodě úhel α , stejný úhel α svírají tečny, které jsou stereografickou projekcí těchto křivek a to v bodě Z' , který je projekcí bodu Z . Velikosti úhlů se při stereografické projekci zachovávají. Tečny křivek přeneseme do roviny ρ pomocí tečné roviny ρ' procházející bodem P , tyto roviny jsou rovnoběžné. Tečny křivek protínají rovinu ρ' v bodech A, B . Do roviny ρ je pak přeneseme po



Obrázek 5: Zachování úhlů mezi křivkami

přímkách, které jsou rovnoběžné s přímkou PZ' , tak vzniknou body A', B' a spojením s bodem Z' získáme úhel $A'Z'B'$ s velikostí α . [7, s. 34–35]

Stejně tak můžeme řešit zachovávání úhlů mezi dvěma rovinami, které jsou vzájemně provázány holomorfní funkcí. Holomorfní funkcí na množině G nazveme funkci, která má ve všech bodech množiny G derivaci, při čemž G je otevřenou podmnožinou komplexních čísel. Zachování úhlů mezi dvěma rovinami s touto funkcí se budeme zabývat v jedné z následujících kapitol. [8, s. 120]

3.2.4 Geometrické významy

Nejprve se podíváme na **Argument derivace**. Mějme dvě roviny. Rovina x, y , ze které získáváme výchozí hodnoty a druhou rovinu u, v , která funkci $w = f(z)$ přiřazuje každému bodu z výchozí roviny jeden bod roviny zobrazovací. Pro body roviny x, y platí: $z = x + iy$, pro body roviny u, v pak $w = u + iv$. Funkce $w = f(z)$ bude holomorfní v oblasti G .

Na obrázku vidíme v rovině x, y libovolnou křivku C začínající v libovolně voleném bodě z_0 , té odpovídá křivka Γ vycházející z bodu w_0 , je jejím zobrazením. Křivka C má v bodě z_0 tečnu t_c . Předpokládejme, že $f'(z_0) \neq 0$. Pokud pro rovnici C platí $z = z(t)$, kde $(0 \leq t \leq 1)$, získáváme rovnici křivky Γ dosazením do $w = f(z)$, čímž získáme $w = f[z(t)] = w(t)$.

Hodnotu $f'(z_0)$ vyjádříme v goniometrickém tvaru: $f(z_0) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Objasníme geometrický význam argumentu α derivace a jejího modulu r . Vezmeme-li libovolný bod $z_0 + \Delta z_0$ na křivce C , bude mu odpovídat bod $w_0 + \Delta w_0$ na křivce Γ . Blíží-li se body po řadě k bodům z_0, w_0 po daných křivkách, blíží se současně $\Delta z_0, \Delta w_0$ nule. Nyní musíme vyjádřit argument a modul, k tomu použijeme limitu:

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Nalezneme tak:

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} \right| = r \quad (3.13)$$

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = \alpha \quad (3.14)$$

Je třeba, aby $f'(z_0) \neq 0$, jinak by α nebylo definováno. Argument zlomků, jak víme z komplexních čísel, je roven rozdílu argumentů. To znamená:

$$\arg \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = \arg \Delta w_0 - \arg \Delta z_0$$

Dosadíme-li tento vztah do rovnice (3. 15) získáme nový tvar rovnice:

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \arg \Delta w_0 - \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \arg \Delta z_0 = \alpha \quad (3.15)$$

Hodnota Δz_0 , pro kterou platí $\Delta z_0 = (z_0 + \Delta z_0) - z_0$, se v obrázcích zobrazuje vektorem spojujícím z_0 s bodem $z_0 + \Delta z_0$, totéž platí pro hodnotu Δw_0 a body $w_0, (w_0 + \Delta w_0)$ v zobrazovací rovině. Argument Δz_0 tedy znázorňuje úhel, který spolu svírá vektor $(z_0, (z_0 + \Delta z_0))$ s kladným směrem osy Ox , nazvěme ho φ a v rovině u, v je argumentem Δw_0 úhel Φ svíraný kladnou poloosou Ou a vektorem $(w_0, (w_0 + \Delta w_0))$. Zkombinujeme-li úhly s rovnicí (3. 16), dostáváme tvar:

$$\lim \Phi - \lim \varphi = \alpha \quad (3.16)$$

V limitách směry vektorů $(z_0, (z_0 + \Delta z_0))$ a $(w_0, (w_0 + \Delta w_0))$ po řadě splývají se směry tečen k C v bodě z_0 a k Γ v w_0 , ty podle rovnice (3.16) existují. Úhly, které vznikají mezi osami Ox, Ou a tečnami t_C, t_Γ nazveme postupně ψ a Ψ . Rovnici (3. 17) lze na základě kolmosti sečen k vektorům $(z_0 + \Delta z_0)$ a $(w_0 + \Delta w_0)$ zapsat jako:

$$\Psi - \psi = \alpha. \quad (3.17)$$

Splynou-li kladné směry os Ox a Ou , vyplne nám e (3. 17), že o úhel α se pootočí tečna ke křivce C v bodě z_0 , pokud ji zobrazíme funkcí $w = f(z)$. α je úhlem mezi původním a zobrazeným směrem, při změně vektorů, jak jsme viděli díky tečnám ke křivkám, zůstává α konstantní. Pokud bychom vedli ze stejných bodů odlišné křivky, označme je C', Γ' , kdy Γ' je zobrazením křivky C' v rovině uv – vidět je můžeme na obrázku, zjistíme analogii s rovnicí (3.17):

$$\Psi' - \psi' = \alpha. \quad (3.18)$$

Odečteme-li obě rovnice od sebe, získáme:

$$\Psi' - \psi' - (\Psi - \psi) = \alpha - \alpha \Rightarrow \Psi' - \Psi = \psi' - \psi$$

$\psi' - \psi$ nám značí úhel mezi křivkami $t_{C'}at_C$ a $\Psi' - \Psi$ úhel mezi $t_{\Gamma'}at_{\Gamma}$. Dvě libovolné křivky vycházející z bodu z_0 se nám tedy, podle poslední rovnice, zobrazí na dvě odpovídající křivky vycházející z bodu $w_0 = f(z_0)$ v zobrazovací rovině u, v . Úhel mezi tečnami k daným i zobrazeným křivkám v bodech z_0, w_0 je stejně orientovaný a má i stejnou velikost. Změní-li se směr křivky C v bodě z_0 o nějaký úhel ve směr křivky C' , přejde i odpovídající směr křivky Γ ve směr Γ' a to o stejný úhel. „Zobrazení pomocí holomorfní funkce zachovává úhly ve všech bodech, kde derivace $f'(z)$ není rovna nule.“ [7, s. 107–109]

Nyní ještě zjistíme, jak to vypadá s geometrickým výrazem **modulu derivace**. Použijeme výše uvedenou rovnici (3. 14), s trochu upraveným zápisem:

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{|\Delta w_0|}{|\Delta z_0|} = r$$

Jmenovatel značí délku vektoru $(z_0, z_0 + \Delta z_0)$, čili vzdálenost mezi body $z_0; z_0 + \Delta z_0$. Čitatel má tutéž vlastnost, aplikuje ji však na vektor „své“ roviny – vektor $(w_0, w_0 + \Delta w_0)$. Z této rovnice vidíme, že jsou-li obě vzdálenosti nekonečně malé, jejich poměr je v limitě roven: $r = |f'(z_0)|$ a to jen v závislosti na z_0 , směr křivky C na ni nemá vliv. Pak tedy můžeme $r = |f'(z_0)|$ považovat za míru deformace zobrazení přes funkci $w = f(z)$. Rozeznáváme tu tři odlišné případy:

1. $r < 1$, měřítko se zmenší, nastane „smrštění“ nekonečně malého elementu;
2. $r = 1$, měřítko zůstává stejné, nekonečně malý element se zobrazí v ekvivalentní nekonečně malý element;
3. $r > 1$, měřítko se zvětší, nastává tedy „protažení“ nekonečně malého elementu.

V každém bodě z_0 , zobrazeným pomocí holomorfní funkce $w = f(z)$, kde $f'(z_0) \neq 0$, je *konstantní prodloužení* neovlivněné směrem. [7, s. 109–110]

3.3 Konformní zobrazení

Zobrazení definované pomocí holomorfní funkce $w = f(z)$, čili každé analytické zobrazení, má v každém svém bodě z_0 , jehož derivace je různá od nuly, dvě vlastnosti:

1. zachovává úhly,
2. má konstantní prodloužení.

Veźmeme nekonečně malý trojúhelník, který je z roviny komplexních čísel. Jeden z jeho vrcholů se nachází v námi již používaném bodě z_0 . V rovině proměnné w tomuto trojúhelníku odpovídá nekonečně malý křivolaký trojúhelník, jehož jeden vrchol se nachází v bodě w_0 . V důsledku zachování úhlů jsou úhly s vrcholy v těchto bodech stejné a poměry mezi odpovídajícími si stranami odpovídají stejnému číslu $r \neq 0$ a to až na nekonečně malou chybu. Zobrazení zachovávající úhly a mající konstantní prodloužení nazýváme **konformním zobrazením**. V závislosti na podkapitole 3. 2. 4 můžeme tvrdit, že: „každé zobrazení, definované pomocí holomorfní funkce $w = f(z)$ je konformní ve všech bodech, kde není derivace této funkce rovna nule.“ [7, s. 110–111]

4 Lineární funkce komplexní proměnné

4.1 Celistvá lineární funkce

Jednoduchou lineární funkci lze zapsat následujícím způsobem:

$$w = az + b, \quad (4.1)$$

kde a, b jsou komplexní proměnné a aby funkce nebyla konstantní, ale lineárně závislá na z , musí být zachována podmínka $a \neq 0$. Celé zobrazení je konformní pro celou komplexní rovinu z a zároveň vzájemně jednoznačné. Existují 3 základní zobrazení, ze kterých se skládají všechny ostatní.

1. $w = z + b$: Zobrazovaný bod se posune do bodu w o vektor Ob , kde O je počátek. Bude-li $w = u + vi$ a $z = x + yi$, pro konstantu b pak platí $b = b_1 + b_2i$. Základní transformace se pak dá napsat do dvou rovnic $u = x + b_1, v = y + b_2$. Jde o rovnice vyjadřující **rovnoběžnou translaci** souřadných os.
2. $w = e^{\alpha i}z$: Pro tuto rovnici platí $|w| = |z|$ a $\arg w = \arg z + \alpha$. Jde o otočení bodu kolem počátku souřadného systému o úhel α . Můžeme napsat $w = u + vi = (x + yi)(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Lehce vidíme, že následně platí $u = x \cos \alpha - y \sin \alpha, v = x \sin \alpha + y \cos \alpha$. V tomto případě jde v posledních rovnicích o rovnice **rotace** souřadných os.
3. $w = rz$: r je reálnou kladnou konstantou, argumenty čísel w, z rovny a pro moduly čísel platí $|w| = r|z|$. Tato funkce nám r -krát prodlouží vzdálenost bodu z od počátku, čili bod w se nám v této vzdálenosti zobrazí na přímce Oz . Jde o **podobnost** se středem v počátku a modulem r .

Složením těchto tří transformací vznikne **obecná** transformace $w = az + b$. Složíme-li je správně do sebe, získáme rovnici (4. 1). Nejprve potočíme vektor Oz o úhel α : $z' = e^{\alpha i}z$, dále vektor r -krát zvětšíme $z'' = rz'$. Nakonec aplikujeme rovnoběžnou translaci bodu z'' : $w = z'' + b$.

Toto bylo posuzování funkce vůči počátku, lze ho však ale posuzovat i vůči nějakému komplexnímu číslu A , pro nějž platí:

$$w - A = a(z - A),$$

A následně vyjádříme: $aA - A = az - w$, označme $A - aA = b$, pak $A = \frac{b}{1-a}$ pro $a \neq 1$. Tak nám vznikla **rotace kolem bodu** A . [7, s. 120–122]

4.2 Lomená funkce

$w = \frac{1}{z}$: jedná se o vzájemně jednoznačné zobrazení, a to pro všechny body komplexní roviny, která je rozšířena o ∞ . Pokud $z = 0 (w = 0)$, odpovídá počátku $w = \infty (z = \infty)$. U tohoto zobrazení budeme používat polární souřadnice, $z = re^{\varphi i}$, $w = \rho e^{\Theta i}$. Pro ρ, Θ platí:

$$\rho = \frac{1}{r}, \Theta = -\varphi.$$

Použijeme jednotkovou kružnici C opsanou kolem nulového bodu. Kružnice přechází při zobrazení (4. 2) sama v sebe. Každý bod se zobrazí na symetrický bod, kde osou symetrie bude reálná osa. Tuto transformaci lze rozložit na dvě jednodušší:

a) $r' = \frac{1}{r}, \varphi' = \varphi,$

b) $\rho = r', \Theta = -\varphi'$

Transformace a) mění argument za převrácený a zachovává argument. Bod z ležící uvnitř kružnice C se zobrazí vně kružnice jako bod w' na prodloužení Oz . Součin vzdáleností bodů z, w' je roven 1, zobrazení se nazývá kruhovou inverzí. Body jsou vzájemně inverzní ke kružnici C , tuto transformaci lze zapsat jako:

$$w' = \frac{1}{\bar{z}}$$

Toto zobrazení je konformním zobrazením druhého druhu. Transformace b) se dá zapsat jako $w = \bar{w'}$. Jde o body, které jsou vzájemně si symetrické vzhledem k reálné ose. Opět se tedy jedná o konformní zobrazení druhého druhu (viz. [7, s. 111–114]), zachovává velikost úhlu, ale obrací jeho orientaci. Spojíme-li tedy transformaci a) a transformaci b), dostáváme analytické zobrazení (tedy zobrazení zachovávající velikost i směr úhlu) $w = \frac{1}{z}$ pro $z \neq 0$. [7, s. 122–123]

4.3 Obecná lineární funkce

Obecná lineární funkce (jinak také homografické zobrazení, nebo také Möbiova funkce) má tvar:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (4.2)$$

a, b, c, d jsou komplexní konstanty, pro které platí $ad - bc \neq 0$, aby se w měnilo se z . Proměnnou z lze také vyjádřit pomocí w :

$$wcz + wd = az + b \Rightarrow wd - b = az - wcz,$$

výsledná funkce má pak tvar:

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}. \quad (4.3)$$

Obě tyto funkce jsou vzájemně jednoznačné. Bodu $z = \infty$ odpovídá v rovině proměnné w bod $w = \frac{a}{c}$, pokud se jedná o bod $w = \infty$ je jeho zobrazení v rovině komplexní proměnné z tvaru $z = -\frac{d}{c}$. K oběma výsledkům dospějeme přes vyšetření limity jednotlivých funkcí pro dané proměnné jdoucí k ∞ . Zderivujeme-li funkci $f(z)$ podle z (4.2):

$$\frac{dw}{dz} = \frac{(cz+d)a - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \quad (4.4)$$

zjistíme, že „zachovává úhly ve všech bodech rozšířené roviny komplexní proměnné z “ [7, s. 124]. Derivace je číslo různé od nuly v bodě z , pokud platí $z \neq -\frac{d}{c}, z \neq \infty$. Položíme $z = \frac{1}{z'}$, získáváme tak funkci:

$$\frac{a+bz'}{c+dz'},$$

která je v bodě $z' = 0$ holomorfní, pokud $c \neq 0$ a má derivaci různou od nuly. Nastane-li případ $c = 0$, použijeme pro $z = \infty$ inverzní funkci $\frac{d}{a+bz}$. Druhou podmínkou bylo vyjmutí případu pro $z = -\frac{d}{c}$, na tento případ myslí inverzní funkce k funkci (4.2) $w = f(z)$. [7, s. 123–124]

4.4 Kruhová vlastnost lineární funkce

Pro tuto transformaci je charakteristickou vlastností přechod kružnice v kružnici či přímku a naopak, přechod přímky v přímku nebo kružnici. Pokud bychom to chtěli zobecnit, můžeme se vrátit ke stereografické projekci, kdy jsme přímku vyjádřili jako kružnici, jejímž jedním bodem je nekonečno. Přímka je tak kružnicí s nekonečným poloměrem (obecnou kružnicí). Původní tvrzení o přechodu kružnic a přímek tak zjednodušíme na tvrzení: „*Při lineární transformaci přejde kružnice v kružnici, t. j. při této transformaci je invariantní systém všech kružnic.*“

Tvar rovnice kružnice v reálných číslech je:

$$A(x^2 + y^2) + mx + ny + l = 0 \quad (4.5)$$

Zvolíme-li $A = 0$ získáme rovnici přímky. Použijme nyní komplexních čísel a odvodíme rovnici kružnice na tvar s komplexními proměnnými. Nejprve si musíme uvědomit rovnosti:

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = z\bar{z},$$

vyjádříme jednotlivé souřadnice x, y :

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

můžeme již dosadit do rovinné rovnice kružnice:

$$Az\bar{z} + \frac{m}{2}z + \frac{m}{2}\bar{z} - \frac{ni}{2}z + \frac{ni}{2}\bar{z} + l \Rightarrow Az\bar{z} + z\frac{m-in}{2} + \bar{z}\frac{m+in}{2} + l = 0.$$

Podíly $\frac{m-in}{2}, \frac{m+in}{2}$ jsou komplexními čísly, které nahradíme po řadě \bar{B}, B a l nahradíme komplexní konstantou C . Dostaneme komplexní rovnici kružnice:

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0. \quad (4.6)$$

A, C jsou reálnými konstantami. Transformací $w = \frac{1}{z}$ získáme po několika úpravách rovnici $A + \bar{B}w + Bz + Cw\bar{w} = 0$, která znázorňuje kružnici v rovině proměnné w (pro $C = 0$ přímkou). Uvedené zobrazení převádí obecné kružnice v obecné kružnice a tak tato vlastnost, na základě předchozích kapitol, platí i pro obecnou lineárně lomenou funkci.[7, s. 124–125]

4.5 Invariant lineární funkce

Mějme obecnou lineární transformaci:

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

je závislá na třech parametrech, použijme na příklad poměry čísel a, b, c, d k jednomu z nich. K určení těchto paramterů a hledané transformace je zapotřebí tří rovnic mezi a, b, c, d . Potřebujeme k tomu body (z_1, z_2, z_3) , které přejdou do druhé roviny jako (w_1, w_2, w_3) . Získáváme tak rovnice:

$$w_k = \frac{az_k + b}{cz_k + d} (k = 1, 2, 3).$$

Odstraňme z nich a, b, c, d a to vytvořením rozdílů mezi zobrazeními jednotlivých bodů:

$$w - w_1 = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_1 + b}{cz_1 + d},$$

pro rozdíl je převedeme na stejného jmenovatele:

$$w - w_1 = \frac{acz_1 + bc z_1 + adz + bd - aczz_1 - bc z - adz_1 - bd}{(cz + d)(cz_1 + d)} = \frac{bc z_1 + adz - bc z - adz_1}{(cz + d)(cz_1 + d)}.$$

Výsledný rozdíl tak po vytýkání vypadá:

$$w - w_1 = \frac{(z - z_1)(ad - bc)}{(cz + d)(cz_1 + d)}$$

Následující tři rozdíly $w - w_2, w_3 - w_1, w_3 - w_2$ odvodíme analogicky podle již odvozeného. Jejich výsledky budou následující:

$$w - w_2 = \frac{(z - z_2)(ad - bc)}{(cz + d)(cz_2 + d)}, \quad w_3 - w_1 = \frac{(z_3 - z_1)(ad - bc)}{(cz_3 + d)(cz_1 + d)}, \quad w_3 - w_2 = \frac{(z_3 - z_2)(ad - bc)}{(cz_3 + d)(cz_2 + d)}$$

Vypočítejme poměry mezi jednotlivými členy:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{\frac{(z - z_1)(ad - bc)}{(cz + d)(cz_1 + d)}}{\frac{(z - z_2)(ad - bc)}{(cz + d)(cz_2 + d)}} = \frac{(z - z_1)(ad - bc)}{(cz + d)(cz_1 + d)} \cdot \frac{(cz + d)(cz_2 + d)}{(z - z_2)(ad - bc)}$$

Pokrátkáme členy $(ad - bc), (cz + d)$:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{(z - z_1)}{(cz_1 + d)} \cdot \frac{(cz_2 + d)}{(z - z_2)}$$

Tentýž postup nyní aplikujeme na poměr $\frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}$ a výsledkem je:

$$\frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{(z_3 - z_1)}{(cz_1 + d)} \cdot \frac{(cz_2 + d)}{(z_3 - z_2)}$$

Nakonec dáme dva získané zlomky do vzájemného poměru:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{(z - z_1)(cz_2 + d)}{(z - z_2)(cz_1 + d)} : \frac{(z_3 - z_1)(cz_2 + d)}{(z_3 - z_2)(cz_1 + d)}$$

Pokud si uvědomíme pravidla dělení zlomků, vidíme možnost zkrácení $(cz_1 + d), (cz_2 + d)$. Následně vidíme, že v lineární lomené funkci se nám zachovává dvojpoměr:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}, \quad (4.7)$$

Dvojpoměr, nebo-li analogický poměr čtyř bodů značíme (z_1, z_2, z, z_3) . Za proměnné můžeme vzít libovolné čtveřice bodů, které si při lineární transformaci odpovídají, získaný poměr je tak **invariantem** lineární transformace. [7, s. 125–126]

Geometricky můžeme závěr předchozího odstavce vysvětlit na kružnici (ve speciálním případě lze aplikovat i na přímku). Mějme kružnici $\zeta = \zeta_0 + re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ se středem ζ_0 a poloměrem r . Pak pro jednotlivé body platí:

$$z_1 = \zeta_0 + re^{i\varphi_1}, z_2 = \zeta_0 + re^{i\varphi_2}, z = \zeta_0 + re^{i\varphi}, z_3 = \zeta_0 + re^{i\varphi_3}.$$

Dvojpoměr tu bude roven reálnému číslu, stejně tak bude témuž číslu roven poměr tětiv spojujících bod z s dalšími dvěma body z_1, z_2 , stejně tak bod z_3 s těmi samými body. Ve výsledku můžeme říci následující závěr: „Vezměme v rovině tři body $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Těmi lze proložit jednu jedinou kružnici.

Stejně v rovině w jsou dány body $\{\alpha', \beta', \gamma'\}$ jimiž také prochází jedna kružnice. Existuje tak jediná lineární funkce převádějící první kružnici v druhou, přičemž bodům $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ budou odpovídat body $\{\alpha', \beta', \gamma'\}$ “.

Posledním, co potřebujeme zjistit je, zda se nám body v kružnici roviny proměnné z přenesou na druhou rovinu dovnitř kruhu či vně. K tomu slouží směr normály ke kružnici $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Normála ke kružnici $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ v jejím libovolném bodu přechází v normálu ke kružnici $\{\alpha', \beta', \gamma'\}$ v bodu, který je zobrazením libovolného bodu. Následně je potřeba vybrat její směr, aby úhel mezi ní a kružnicí $\{\alpha', \beta', \gamma'\}$, byl stejně orientovaný jako úhel, který mezi sebou má normála s kružnicí $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. [7, s. 126–128]

4.6 Invariantnost dvojice vzájemně inverzních bodů

V kružnici, s libovolným poloměrem r , se nachází bod P , vně kružnice naopak leží bod P' . Tyto body jsou vzájemně inverzní, vzhledem ke kružnici, pokud oba leží na polopřímce OP a zároveň platí rovnost $r_2 = |OP| \cdot |PP'|$. Libovolná kružnice, kolmá k základní kružnici, patří do svazku kružnic procházejících inverzními body a protíná základní kružnici v bodě A . Prochází-li tedy kružnice bodem P , musí procházet i bodem P' , pokud je k němu inverzní. Celý tento svazek kružnic je ortogonální. [7, s. 130–131]

4.7 Různé typy lineárních transformací

Lineární neidentická transformace $w = \frac{az+b}{cz+d}$, označme ji L , má nejvýše dva samodružné body, tzn. že tyto body se zobrazují samy na sebe. Jejich hodnoty zjistíme po vyřešení následující rovnice:

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0. \quad (4.8)$$

Použijeme řešení klasické kvadratické rovnice pro 2 kořeny, tedy:

$$z = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Je-li výsledek odmocniny roven 0, samodružné body splývají v jeden, pokud ne, získáváme dva samodružné body, které označíme z_1, z_2 , oba tyto případy musí splnit podmínku $c \neq 0$. Pokud $c = 0$, stává se samodružným bodem nekonečně vzdálený bod komplexní proměnné z (viz [7, s. 135]). Pro vysvětlení zobrazíme z a w do jedné roviny a připojíme k nim pomocnou rovinu, do níž budeme zobrazovat proměnné v a ζ , pro které platí:

$$v = \frac{w-z_1}{w-z_2} = S(w), \quad \zeta = \frac{z-z_1}{z-z_2} = S(z)$$

Pro případ, že se $z_2 = \infty$ nám v transformacích zůstanou jen čitatelé, tedy $v = w - z_0 = S(w)$, $\zeta = z - z_1 = S(z)$. Vzorce $v = S(w)$, $w = L(z)$ a $z = S^{-1}(\zeta)$ ukazují, že $v = SLS^{-1}(\zeta)$. Pevnými body této funkce zůstávají 0 a ∞ , $\Rightarrow v = K\zeta$ a K je komplexní konstantou. Díky tomu dostáváme **normální tvar** lineární transformace se dvěma různými samodružnými body. Lze ho odvodit z rovnice (4.7), předpokládejme pro tuto úpravu $w_1 = z_1$, $w_2 = z_2$:

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} : \frac{w_3 - z_1}{w_3 - z_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \Rightarrow \frac{w - z_1}{w - z_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{w_3 - z_2}{w_3 - z_1}.$$

Konstantou K se stane výsledek součinu dvou podílů $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{w_3 - z_2}{w_3 - z_1}$, konečná rovnice vypadá následovně:

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = K \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad (4.9)$$

K lze jednoduše vyjádřit:

$$K = \frac{w - z_1}{w - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_1},$$

víme, že K je nezávislé na proměnné z . Bude-li $z = 0$, $w = \frac{b}{d}$, najdeme rovnici:

$$K = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}} \quad (4.10)$$

Pokud nastane případ $z_2 = \infty$, zjednoduší se konstanta $K = \frac{a}{d}$.

Transformace $v = K\zeta$ má tři různé formy:

1. $K \in \mathbb{R}^+$ bude transformace **hyperbolická**, odpovídá podobnému zobrazení,
2. $K = e^{\alpha i}$, ($\alpha \neq 0$) je transformací **eliptickou**, která odpovídá otočení,
3. $K = re^{\alpha i}$, ($\alpha \neq 0, r \neq 1$), nazývá se **loxodromickou**, skládá se z obou předchozích, čili z podobnosti a otočení.

V případě 1. a 2. zobrazení mají přímky procházející počátkem a dále kružnice, se středem v bodě $\zeta = 0$, významnou úlohu. Při našich zobrazeních zůstávají nezměněny. Pro hyperbolické zobrazení se kružnice mezi sebou přemístí, přímky zůstávají nezměněny, u zobrazení eliptického to platí naopak. Dále jsou tu další dva systémy kružnic, které získáme je zobrazeními:

$$\zeta = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \zeta = z - z_1$$

První systém jsou kružnice se středem ležícím na přímce procházející samodružnými body z_1, z_2 , druhý systém jsou kružnice k nim ortogonální, pokud je $z_2 = \infty$, jedná se u prvního systému o přímky, respektive kružnice s nekonečným poloměrem, které se protínají v z_1 , druhý systém jsou kružnice se středem v tomto bodě. Hyperbolické zobrazení zachovává přímky, přechází samy v sebe, kružnice se mezi sebou přemístí, první systém kružnic přechází samy v sebe (obrázky jsou zobrazeny

v praktické části u rozličných samodružných bodů). Eliptická transformace má přímky a kružnice se středem $\zeta = 0$ naopak k hyperbolické, kružnice přechází samy v sebe a přímky se přemísť, samy v sebe přechází kružnice druhého systému. Ve 3. případě, při loxodromické transformaci se žádná z přímek ani kružnic sama na sebe nezobrazí a to při jakémkoli omezení, tím důvodem je právě složení transformace z podobnosti a otočení. Veškeré přímky procházející počátkem souřadnic by se na sebe mohly zobrazovat, avšak jde právě o otočení kolem počátku o π , poloviny se vzájemně vyměňují.

Speciálním případem samodružných bodů u lineárních transformací je situace, kdy oba body splynou v jeden, nazýváme ho **parabolickým**. Body z, w si necháme ve stejné rovině. K pomocné rovině s body ζ, v se dostaneme přes substitute:

$$v = \frac{1}{w - z_0}, \zeta = \frac{1}{z - z_0}$$

Pro přechod od ζ k v existuje pro transformaci jediný samodružný bod v nekonečnu. Její tvar $v = \zeta + h$, obecně pak:

$$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + h.$$

Speciálním případem parabolické transformace je trasnlace, každá přímka roviny bodu ζ , která je rovnoběžná s h přechází sama v sebe, dále přímky k nim kolmé se mezi sebou vyměňují. V rovině z jim tak odpovídají dva ortogonální systémy kružnic procházející jediným samodružným bodem, bodem z_0 , kružnice těchto systémů jsou obrazy rovnoběžných přímek, mající v bodě z_0 stejný směr. [7, s. 134–139]

5 Praktická část

Hvězdy kolem nás se nachází na „nebeské“ sféře. Abychom s nimi mohli pracovat, musíme si jejich souřadnice upravit. Udělejme si proto nyní přehled všech souřadnic, jejich označení:

1. x, y, z, t - události na nebeské sféře;
2. X, Y, Z - právě pozorované události zobrazené na sféře s poloměrem délky 1, pozorovatel se nachází ve středu sféry;
3. ξ, η, ζ - souřadnice na sféře s jednotkovým průměrem a pozorovatelem nacházejícím se ve sférickém bodě P ;
4. $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ - souřadnice komplexní proměnné v rovině, (od souřadnic x, y, z z bodu 1 jsou dostatečně „vzdáleny“ a odlišeny);
5. v - rychlost jakou se pohybujeme při pozorování;
6. c - rychlost světla $c = 299792458 \frac{m}{s}$, pro případné výpočty použijeme její zaokrouhlenou rychlost, tedy $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$, ve všech soustavách, jak jsme již zjistili na počátku, je neměnná;
7. t - souřadnice času, je třeba ji rozlišit kvůli dilataci času v jednotlivých vztažných soustavách.

Jednotlivé vztahy mezi souřadnicemi jsou v textu odvozeny. Dále rozlišujeme souřadnice „reálné“ a „námi viditelné“, budeme je odlišovat apostrofem. Souřadnice reálné jsou ty, jež události (případně hvězdy) opravdu mají, značí místa, na kterých se nacházejí, kde probíhají, souřadnice jsou netransformované, naopak souřadnice námi viditelné označují souřadnice hvězd tak, jak je vidíme transformované lineární lomenou funkcí, prošly tedy Lorentzovou transformací. Pro zjištění zmiňované a hledané lineární lomené funkce, použijeme vzorce Lorentzovy transformace.

Chceme odvodit, jakou podobu má Lorentzova transformace mezi reálnými událostmi zobrazenými do roviny a těmi, které my skutečně vidíme. Do vzorce (2.6) nyní dosadíme vztahy, které již obsahují Lorentzův faktor (2.10), tedy vztahy (2.11) a (2.14). Pohybujeme-li se po ose x , budou vztahy vypadat následovně:

$$X' = \frac{x'}{ct'} = \frac{\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \frac{1}{c}. \quad (5.1)$$

Tento vztah musíme však ještě dále upravit, abychom dostali sférickou souřadnici pro pohyb ve směru zvolené osy:

$$\frac{x'}{ct'} = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{t-\frac{vx}{c^2}} \frac{1}{c}$$

Nyní pokrátkáme odmocniny a celý zlomek rozšíříme $\frac{1}{ct}$, abychom dostali souřadnice na sféře.

$$\frac{x'}{ct'} = \frac{x - vt}{\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)c} = \frac{\frac{x}{ct} - \frac{vt}{ct}}{\frac{ct}{ct} - \frac{cvx}{c^3t}} = \frac{\frac{x}{ct} - \frac{v}{c}}{1 - \frac{vx}{c^2t}}$$

Aby se nám lépe pracovalo a abychom neměli zmatek v souřadnicích, označíme si souřadnice převedené na sféru velkými písmeny:

$$X = \frac{x}{ct}, Y = \frac{y}{ct}, Z = \frac{z}{ct}. \quad (5.2)$$

Nyní tedy dosadíme vyjádřené vztahy:

$$X' = \frac{x'}{ct'} = \frac{X - \frac{v}{c}Y}{1 - \frac{v}{c}X} \quad (5.3)$$

Tímto jsme vyřešili přenesení souřadnic osy x . Potřebujeme ještě zjistit, jak budou vypadat souřadnice na osách y, z . K jejich vyjádření se dostaneme stejnou cestou, jen s tím rozdílem, že souřadnici x nahradíme hledanou souřadnicí, tedy buď y nebo z . Postačí tedy, když si tu zobrazíme výsledky úprav, s dosazením z (5.2), pro souřadnice y :

$$Y' = \frac{y'}{ct'} = \frac{Y - \frac{v}{c}Z}{1 - \frac{v}{c}Y} \quad (5.4)$$

a souřadnice z :

$$Z' = \frac{z'}{ct'} = \frac{Z - \frac{v}{c}X}{1 - \frac{v}{c}Z}. \quad (5.5)$$

Nyní jsme tedy odvodili všechny sférické souřadnice hvězd a díky tomu se můžeme začít zabývat tím, jak budou jednotlivé souřadnice vypadat, pokud se budeme vůči nim pohybovat relativistickou rychlostí ve směru jednotlivých os.

5.1 Lorentzova transformace a stereografická projekce

Abychom se však mohli pustit do převádění hvězd, musíme si nejprve upravit sféru, na níž body leží, lépe řečeno musíme přemístit pozorovatele, který sféru pozoruje z jejího středu. Dále pak musíme poloměr soustavy sjednotit ze $r = t$, což je doba za kterou světlo odražené hvězdou doletí k pozorovateli, na poloměr jednotkový $r = 1$.

Nyní máme hvězdy zobrazeny na sféře, pro kterou platí:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \quad (5.6)$$

zkrácením jejího průměru na 1, vydělením t^2 získáme:

$$\frac{x^2}{c^2 t^2} + \frac{y^2}{c^2 t^2} + \frac{z^2}{c^2 t^2} = 1.$$

Následně ještě převedeme rovnici na rovnou nule a zlomky nahradíme velkými písmeny, které budou zastupovat.

$$1 - \frac{x^2}{c^2 t^2} - \frac{y^2}{c^2 t^2} - \frac{z^2}{c^2 t^2} = 0.$$

$$1 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0. \quad (5.7)$$

To jsou v základu upravené souřadnice, jednotlivě tak platí vztahy (jak v obou vztažných soustavách, v soustavě pozorovatele i v soustavě hvězd):

$$X = \frac{x}{ct}, Y = \frac{y}{ct}, Z = \frac{z}{ct}. \quad (5.8)$$

Přesunutí souřadnice na jednotkové sféře odlišíme reálné souřadnice hvězd od souřadnic na námi viditelnými přidáním apostrofu. Jednotlivé souřadnice se budou lišit vzhledem k tomu, kterým směrem, respektive ve směru které osy, se budeme pohybovat. Obecně můžeme tento vztah zapsat jako

$$1 - X'^2 - Y'^2 - Z'^2 = (1 - X^2 - Y^2 - Z^2) \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (5.9)$$

kde $?$ označuje místo pro proměnnou, v jejímž směru se pohybujeme. V konkrétních případech ho pak nahradíme X, Y nebo Z .

Ještě upravíme postavení pozorovatele uvnitř sféry. Představíme-li si sféru, pozorovatel stojí v jejím středu, posuneme jej do bodu P , z něhož budeme promítat body ze sféry do komplexní roviny. Usnadní nám to výpočty. V kapitole 3.2 jsme jej nazvali bodem O . Musíme tedy přemístit "souřadnice" pozice pozorovatele po ose z o poloměr sféry níže, tedy z bodu $[0; 0; 1]$ do bodu $[0; 0; 0]$. Změní se tím i souřadnice osy z :

$$[X; Y; Z] = [2\xi; 2\eta; 2(\zeta - 1)] = 2[\xi; \eta; \zeta - \frac{1}{2}] \quad (5.10)$$

Pro jednotlivé souřadnice tak obecně platí vztahy:

$$\xi' = \frac{1}{2}X', \eta' = \frac{1}{2}Y', \zeta' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Z', \quad (5.11)$$

$$X = 2\xi, Y = 2\eta, Z = 2\zeta - 1. \quad (5.12)$$

Máme připraven základ pro uskutečnění výpočtů na převod souřadnic do roviny.

Lorentzova transformace nám říká, že při pohybu ve směru některé z os zůstávají zbylé dvě

souřadnice neměnné. Nyní tyto obecné vzorce aplikujeme na pohyby ve směru jednotlivých os.

5.1.1 Pohyb ve směru osy z

Vydejme se nejprve ve směru osy z . Od pohybu po zbylých dvou osách se liší tím, že se v rovině x, y nevyskytuje, její velikost v prostoru však ovlivní souřadnice bodu v komplexní rovině. Najít lineární lomenou funkci pro tento směr je o něco snazší. Začneme tedy se změnou souřadnic při Lorentzově transformaci, nejprve nezměněné souřadnice:

$$x' = x, y' = y, \quad (5.13)$$

dále pak souřadnice z , která se nám při pohybu mění:

$$z' = \frac{z - \frac{v}{c}t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (5.14)$$

Dále musíme ještě zohlednit čas, který, jak jsme si ukázali a odůvodnili v kapitole o speciální teorii relativity, se také změní:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c}z}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (5.15)$$

Zkombinujeme nyní právě odvozené vztahy se vztahy (5.8), nejprve souřadnice x :

$$X' = \frac{x'}{ct'} = \frac{x}{c \frac{t - \frac{vz}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}} = \frac{ct \frac{x}{ct} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{ct \left(1 - \frac{vz}{ct}\right)} = \frac{X \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c}Z} \quad (5.16)$$

Použijeme stejný postup na souřadnici y :

$$Y' = \frac{y'}{ct'} = \frac{y}{c \frac{t - \frac{vz}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}} = \frac{ct \frac{y}{ct} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{ct \left(1 - \frac{vz}{ct}\right)} = \frac{Y \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c}Z}. \quad (5.17)$$

Nyní upravíme souřadnici, v jejímž směru se pohybujeme, tedy souřadnici z :

$$Z' = \frac{z'}{ct'} = \frac{\frac{z - \frac{v}{c}t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}}{c \frac{t - \frac{v}{c}z}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}} = \frac{z - \frac{v}{c}t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{t - \frac{v}{c}z}, \quad (5.18)$$

vykrátíme odmocniny a ze zbylých členů vytkneme ct :

$$\frac{ct\left(\frac{z}{ct} - \frac{v}{c}\right)}{ct\left(1 - \frac{vz}{ct}\right)},$$

teď provedeme zpětný postup ze vztahu (2.7):

$$\frac{Z - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}Z}. \quad (5.19)$$

Právě jsme transformovali reálné souřadnice na naši sféru o poloměru $r = 1$. Dále musíme takto transformovat i souřadnice ξ, η, ζ na sféře s průměrem $d = 1$. Použijeme vztahy (5.11) a (5.12):

$$\xi' = \frac{1}{2}X' = \frac{X\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{2(1 - \frac{v}{c}Z)} = \frac{2\xi\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{2[1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1)]} = \frac{\xi\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1)} \quad (5.20)$$

Stejným způsobem upravíme další neměnnou souřadnici:

$$\eta' = \frac{1}{2}Y' = \frac{Y\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{2(1 - \frac{v}{c}Z)} = \frac{2\eta\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{2[1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1)]} = \frac{\eta\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1)} \quad (5.21)$$

Nakonec se opět pustíme do souřadnice ζ :

$$\zeta' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Z' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{Z - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}Z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{2\zeta - 1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1)}. \quad (5.22)$$

Nyní máme převedeny všechny souřadnice do potřebných tvarů a vyjádřili jsme si vše, co potřebujeme k dalšímu převádění. Potřebujeme nyní vyjádřit komplexní číslo z , toto z je jiné, než prostorová souřadnice z , již měli doposud ve výpočtech, dosadíme tedy do vzorce komplexního čísla (3.7):

$$z' = \frac{\xi' + i\eta'}{1 - \zeta'} = \frac{\frac{\xi\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1)} + i\frac{\eta\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1)}}{1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{2\zeta - 1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1)}\right]}, \quad (5.23)$$

rovnice se musí ještě upravit na tvar požadované lineární lomené funkce $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou konstantami záviselými na rychlosti, kterou se pozorovatel pohybuje vůči soustavě hvězd. Dále tedy budeme upravovat:

$$z' = \frac{\frac{(\xi + i\eta)\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1)}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2\zeta - 1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1)}} = \frac{\frac{(\xi + i\eta)\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1)}}{\frac{1}{2}\left[1 - \frac{2\zeta - 1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1)}\right]}$$

Nyní převedeme zlomek na součin dvou zlomků a pokráčíme:

$$z' = \frac{(\xi + i\eta)\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1)} \frac{2[1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1)]}{1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1) - (2\zeta - 1 - \frac{v}{c})} = \frac{2\left[(\xi + i\eta)\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}\right]}{1 - \frac{v}{c}(2\zeta - 1) - (2\zeta - 1 - \frac{v}{c})}.$$

Posčítáme vhodně členy a vyjádříme lineární lomenou funkci:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{2 \left[(\xi + i\eta) \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]}{1 - 2\frac{v}{c}\zeta + \frac{v}{c} - 2\zeta + 1 + \frac{v}{c}} = \frac{2 \left[(\xi + i\eta) \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]}{2 - 2\frac{v}{c}\zeta - 2\zeta + 2\frac{v}{c}} = \frac{2 \left[(\xi + i\eta) \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]}{2(1 - \frac{v}{c}\zeta - \zeta + \frac{v}{c})} = \\ &= \frac{(\xi + i\eta) \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{(1 - \zeta)(1 + \frac{v}{c})} = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} \frac{\sqrt{(1 + \frac{v}{c})(1 - \frac{v}{c})}}{\sqrt{(1 + \frac{v}{c})(1 + \frac{v}{c})}} = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}} \end{aligned}$$

Jak vidíme, první zlomek nám znázorňuje komplexní číslo v rovině podle vzorce (3.7), aniž bychom museli použít vzorců stereografické projekce. Výsledná funkce tak vypadá:

$$z' = z \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}, \quad (5.24)$$

kde $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v}{c}}$ a $\delta = \sqrt{1 + \frac{v}{c}}$, konstanty $\beta, \gamma = 0$.

5.1.2 Pohyb ve směru osy x

Zabývejme se nyní pohybem ve směru osy x . Bude o něco složitější, než předchozí směr, komplexní číslo z se nám nezobrazí tak brzy a tak jasně. Souřadnicemi, které zůstanou stejné, jsou nyní souřadnice:

$$y' = y, z' = z \quad (5.25)$$

V tomto případě je z souřadnicí, ne komplexním číslem. Souřadnice, které se nám oproti dvěma předchozím mění, jsou x a časová souřadnice t .

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (5.26)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (5.27)$$

Opět začneme výpočty úpravou souřadnic za použití vzorců, které jsme si na počátku odvodili, (5.11), (5.12) a zkombinujeme je s právě odvozenými souřadnicemi:

Zkombinujeme nyní právě odvozené vztahy se vztahy (5.8), nejprve souřadnice x :

$$X' = \frac{x'}{ct'} = \frac{\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}}{\frac{t - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{ct - vx} = \frac{x - vt}{ct - vx} = \frac{ct \left(\frac{x}{ct} - \frac{v}{c}\right)}{ct \left(1 - \frac{vx}{ct}\right)} = \frac{X - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}X}, \quad (5.28)$$

souřadnice y je stejná, jako v předchozím směru:

$$Y' = \frac{y'}{ct'} = \frac{y}{c \frac{t - \frac{vx}{c}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}} = \frac{ct \frac{y}{ct} \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{ct (1 - \frac{vx}{ct})} = \frac{Y \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 - \frac{v}{c} X}, \quad (5.29)$$

souřadnici z musíme znovu odvodit, oproti předchozímu směru zůstává souřadnice jako taková stejná, mění se pouze v rámci celkového zobrazení:

$$Z' = \frac{z'}{ct'} = \frac{z}{\frac{t - \frac{vx}{c}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}} = \frac{ct \frac{z}{ct} \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{ct (1 - \frac{vx}{ct})} = \frac{Z \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 - \frac{v}{c} X}. \quad (5.30)$$

Přejdeme opět ke sférickým souřadnicím ξ, η, ζ . V souřadnici ξ použijeme odvozený vztah (5.28):

$$\xi' = \frac{1}{2} X' = \frac{1}{2} \frac{X - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} X} = \frac{1}{2} \frac{2\xi - \frac{v}{c}}{1 - 2\frac{v}{c}\xi}. \quad (5.31)$$

Stejným způsobem upravíme souřadnici η , s použitím vzorce (5.29):

$$\eta' = \frac{1}{2} Y' = \frac{Y \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{2(1 - \frac{v}{c} X)} = \frac{2\eta \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{2(1 - \frac{v}{c}\xi)}. \quad (5.32)$$

Nakonec se opět pustíme do souřadnice z se vztahem (5.30):

$$\zeta' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Z' = \frac{1}{2} + \frac{Z \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{2(1 - \frac{v}{c} X)} = \frac{1}{2} + \frac{(2\zeta - 1) \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{2(1 - \frac{v}{c}\xi)}. \quad (5.33)$$

Tímto posledním výpočtem jsme si opět připravili podklady pro zjištění souřadnic hvězd v rovině, a zároveň tak pro zjištění, jak se tyto souřadnice pozmění, budeme-li se pohybovat rychlostí blízkou rychlosti světla a při tom pozorovat hvězdy. Opět se budeme snažit upravit výraz do lineární lomené funkce tvaru: $z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou konstanty závislé na rychlosti, kterou pozorovatel letí.

Nyní si opět musíme uvědomit, že námi zmiňované z se v tuto chvíli opět stává komplexním číslem. Použijme opět vzorec pro vyjádření komplexního čísla přes sférické souřadnice:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{\xi' + i\eta'}{1 - \zeta'} = \frac{\frac{1}{2} \frac{2\xi - \frac{v}{c}}{1 - 2\frac{v}{c}\xi} + i \left[\frac{2\eta \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{2(1 - \frac{v}{c}\xi)} \right]}{1 - \frac{1}{2} - \frac{(2\zeta - 1) \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{2(1 - \frac{v}{c}\xi)}} = \\ &= \frac{2\xi - \frac{v}{c} + 2i\eta \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{2(1 - 2\frac{v}{c}\xi)} \frac{2(1 - 2\frac{v}{c}\xi)}{1 - 2\frac{v}{c}\xi - (2\zeta - 1) \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{2\xi - \frac{v}{c} + 2i\eta \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 - 2\frac{v}{c}\xi - (2\zeta - 1) \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \end{aligned} \quad (5.34)$$

V tomto kroku jsme u předchozího viděli odvození komplexní souřadnice z . Tady to tak není. Musíme proto použít nejprve vzorce stereografické projekce pro převedení souřadnic do roviny, tedy vzorce (3.9), (3.10) a (3.11), dosadíme je tedy do výsledku rovnice (5.34):

$$z' = \frac{\frac{2x - \frac{v}{c}(x^2 + y^2 + 1) + 2iy\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{x^2 + y^2 + 1}}{\frac{x^2 + y^2 + 1 - 2\frac{v}{c}x - (2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2 - 1)\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{x^2 + y^2 + 1}} =$$

$$= \frac{2x - \frac{v}{c}(x^2 + y^2 + 1) + 2iy\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{x^2 + y^2 + 1} \cdot \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1 - 2\frac{v}{c}x - (2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2 - 1)\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

zkrátíme člen $x^2 + y^2 + 1$ a dostaneme následující tvar:

$$z' = \frac{2x - \frac{v}{c}(x^2 + y^2 + 1) + 2iy\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{x^2 + y^2 + 1 - 2\frac{v}{c}x - (2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2 - 1)\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (5.35)$$

Nyní máme všechny souřadnice v rovině. Nyní si však musíme odvodit vzorce pro vyjádření proměnných x, y z komplexních souřadnic z, \bar{z} , tedy:

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy.$$

Nyní si vyjádříme souřadnici x :

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) \Rightarrow x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad (5.36)$$

dále souřadnici y :

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) \Rightarrow y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad (5.37)$$

a nakonec součet druhých mocnin, který se nám v rovnici (5.35) také objevuje:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \quad (5.38)$$

Pokračujme v předchozím výpočtu dosazením rovnic (5.36), (5.37) a (5.38) do rovnice (5.35):

$$z' = \frac{2\frac{1}{2}(z + \bar{z}) - \frac{v}{c}(1 + z\bar{z}) + 2i\frac{1}{2i}(z - \bar{z})\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{z\bar{z} + 1 - 2\frac{v}{c}\frac{1}{2}(z + \bar{z}) - (z\bar{z} - 1)\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} =$$

$$= \frac{(z + \bar{z}) - \frac{v}{c}(1 + z\bar{z}) + (z - \bar{z})\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + z\bar{z} - \frac{v}{c}z - \frac{v}{c}\bar{z} + (1 - z\bar{z})\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} =$$

$$= \frac{-\frac{v}{c} - \frac{v}{c} z\bar{z} + z \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right] + \bar{z} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]}{1 + z\bar{z} - z\bar{z}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{v}{c}z - \frac{v}{c}\bar{z}}.$$

Z rovnic vytkneme Lorentzův faktor $\frac{v}{c}$ a čitatele i jmenovatele rozložíme na součin dvou závorek:

$$\begin{aligned} & \frac{-\frac{v}{c} \left[z\bar{z} + \frac{z \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)}{-\frac{v}{c}} + \frac{\bar{z} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)}{-\frac{v}{c}} + 1 \right]}{z\bar{z} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right) - \frac{v}{c}z - \frac{v}{c}\bar{z} + 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \\ & = \frac{-\frac{v}{c} \left[z + \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)}{-\frac{v}{c}} \right] \left[\bar{z} + \frac{\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)}{-\frac{v}{c}} \right]}{\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right) \left[z\bar{z} - \frac{\frac{v}{c}z}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{\frac{v}{c}\bar{z}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right]} \end{aligned}$$

Odbočme teď k jedné části vzorce, je třeba si kvůli dalšímu rozkládání na závorky, uvědomit následující rovnost:

$$\frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1 - 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]^2} = \frac{\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]^2}. \quad (5.39)$$

Vraťme se zpět a použijme výsledek z rovnice (5.39):

$$\frac{-\frac{v}{c} \left[z + \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)}{-\frac{v}{c}} \right] \left[\bar{z} + \frac{\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)}{-\frac{v}{c}} \right]}{\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right) \left[z\bar{z} - \frac{\frac{v}{c}z}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{\frac{v}{c}\bar{z}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]^2} \right]}$$

teď můžeme rozložit i jmenovatele na 2 závorky:

$$\frac{-\frac{v}{c} \left[z + \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)}{-\frac{v}{c}} \right] \left[\bar{z} + \frac{\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)}{-\frac{v}{c}} \right]}{\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right) \left[z - \frac{\frac{v}{c}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right] \left[\bar{z} - \frac{\frac{v}{c}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right]}.$$

v této chvíli musíme opět odbočit, abychom si ukázali, že lze zkrátit závorky s komplexně sdruženými

členy:

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{v}{c}\bar{z} + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)}{-\frac{v}{c}} &= \frac{-\frac{v}{c}\bar{z} + \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)}{-\frac{v}{c}} \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\bar{z}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right) - \frac{v}{c}} \\ \frac{\bar{z}\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right) - \frac{v}{c}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} &= \frac{-\frac{v}{c}\bar{z}\left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right) + 1 - 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2}{-\frac{v}{c}\bar{z}\left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right) + \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1 \end{aligned} \quad (5.40)$$

Odvodili jsme si, že závorky se sdruženými komplexními čísly \bar{z} můžeme opravdu zkrátit:

$$z' = \frac{-\frac{v}{c} \left[z + \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)}{-\frac{v}{c}} \right]}{\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right) \left[z - \frac{\frac{v}{c}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right]} = \frac{-\frac{v}{c}z + \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)}{\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)z - \frac{v}{c}} \quad (5.41)$$

Konečná odvození rovnice, jak převést souřadnice kterékoli hvězdy, nebo kteréhokoli libovolného objektu z nebeské sféry do komplexní roviny a znázornění toho, jak pozorovatel daný objekt uvidí, pokud se bude pohybovat ve směru osy x . Opět se nám podařilo dovést zobrazovací funkci do tvaru lineární lomené funkce. Oproti předchozí lomené funkci se však liší jednotlivé konstanty. Pro tuto funkci platí:

$$\alpha = -\frac{v}{c}, \beta = 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \gamma = 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \delta = -\frac{v}{c} \quad (5.42)$$

5.1.3 Pohyb ve směru osy y

Podívejme se ještě v rychlosti, jak by vypadala funkce pro pohyb ve směru osy y . Je zřejmé, že se bude podobat pohybu ve směru osy x . Nebudeme proto počítat krok po kroku odvozování této funkce a pomůžeme si odkazováním na podkapitulu 5.1.2.

Začneme opět souřadnicemi podle Lorentzovy transformace:

$$x' = x, z' = z \quad (5.43)$$

z se stává opět souřadnicí, není komplexním číslem. Kromě souřadnice t , která se nám mění pokaždé se nám tu změní i souřadnice y :

$$y' = \frac{y - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (5.44)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c}y}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (5.45)$$

Upravme nyní souřadnice na naši jednotkovou sféru, souřadnice už nebudeme upravovat postupně,

provedli bychom to analogicky jako v případech (5.28), (5.29), (5.30). Nám nyní postačí výsledky:

$$X' = \frac{X\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c}Y}, \quad Y' = \frac{Y - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}Y}, \quad Z' = \frac{Z\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c}Y}. \quad (5.46)$$

Stejným způsobem převedeme získané vztahy na sférické souřadnice (postup je opět analogický se vzorci (5.30), (5.31), (5.32)):

$$\xi' = \frac{2\xi\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{2\left(1 - \frac{v}{c}\eta\right)}, \quad \eta' = \frac{1}{2} \frac{2\eta - \frac{v}{c}}{1 - 2\frac{v}{c}\eta}, \quad \zeta' = \frac{1}{2} + \frac{(2\zeta - 1)\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{2\left(1 - \frac{v}{c}\eta\right)}. \quad (5.47)$$

S těmito rovnicemi se můžeme pustit do úprav pro lineární lomenou funkci po vzoru rovnic od (5.34).

$$z' = \frac{\xi + i\eta'}{1 - \zeta'} = \frac{\frac{2\xi\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{2\left(1 - \frac{v}{c}\eta\right)} + i\frac{1}{2} \frac{2\eta - \frac{v}{c}}{1 - 2\frac{v}{c}\eta}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{(2\zeta - 1)\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{2\left(1 - \frac{v}{c}\eta\right)}} \quad (5.48)$$

podobnými úpravami bychom došli do velice podobných výsledků. V okamžiku, kdy se dostaneme k rozkládání členů na závorky, musíme znovu řešit rovnici (5.40). Tentokrát nám ale nevychází 1, souřadnice y v komplexní rovině vyjadřuje imaginární část komplexních čísel, je tak na snadě, že výsledkem rovnice (5.40), upravené pro osu y , bude i , tedy imaginární jednotka. Následně nám tak ovlivní i výsledek hlavní rovnice, výsledná převodová funkce souřadnic pro pohyb ve směru osy y tak bude vypadat:

$$z' = \frac{-i\frac{v}{c}z + \left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - 1\right)}{\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)z - i\frac{v}{c}} \quad (5.49)$$

Ujasněme si ještě, jak budou vypadat konstanty v případě téhle lineární lomené funkce:

$$\alpha = -i\frac{v}{c}, \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - 1, \gamma = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \delta = -i\frac{v}{c} \quad (5.50)$$

5.2 Vlastnosti vycházející z předchozích kapitol

Právě jsme dokázali, že pro pozorování ve směru tří ortogonálních os platí tvrzení, že zobrazení je lineární lomenou funkcí. Podíváme-li se na vyjádření souřadnic Lorentzovou transformací, zjistíme kontrakci délky právě ve směru pohybu. Budeme-li se tedy pohybovat příkladně ve směru osy x , (ξ) vzdálenost mezi hvězdami určená touto souřadnicí se nám bude zdát kratší, než ve skutečnosti je. Je však nutno upozornit, že kratší se budou zdát, díváme-li se ve směru pohybu. Pokud bychom se dívali opačně, v případě vesmírné rakety bychom pozorovali trasu, kterou jsme již ulétli, vzdálenost by se nám prodlužovala.

Stojíme-li na jednom místě, vidíme prakticky zmenšený model skutečného rozmístění hvězd.

Stereografická projekce nám zachovává úhly, jak jsme zaznamenali v podkapitole 3.2.3. V další části pak vidíme, zachování konstantního prodloužení, v našem případě se jedná o smrštění. Pro všechny konstanty α a δ platí, $\alpha < 1, \delta < 1$.

Abychom o těchto funkcích mohli říci více, měli bychom zjistit, o které typy transformací, podle kapitoly 4.8, se jedná. Nejprve zjistíme počet samodružných bodů a posléze koeficient z rovnice (4.10).

5.2.1 Samodružné body

Samodružné body, jak víme z kapitoly 4.7, nám ovlivňují, o jaký typ transformace se bude jednat, zda bude hyperbolická, eliptická, loxodromická nebo parabolická. Dále jimi prochází přímka, na které leží středy ortogonálních kružnic, které se na sebe zobrazují a do třetice, jimi procházení všechny kružnice, které obsahují oba samodružné body, jak později uvidíme z obrázků, jejich středy leží na ose kolmé k ose, na níž samodružné body leží.

Nejprve zjistíme samodružné body při pohybu ve směru osy z . Rovnici můžeme sestavit následovně z rovnice (5.24):

$$z\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} = z \Rightarrow z\sqrt{1-\frac{v}{c}} = z\sqrt{1+\frac{v}{c}} \Rightarrow z = 0.$$

Samodružným bodem pro z_1 se stal bod 0, čili počátek souřadnicového systému, druhým samodružným bodem je bod v nekonečnu $z_2 = \infty$.

Nyní přejdeme na pohyb ve směru souřadnice x . K tomu použijeme odvozený vztah (5.41)

$$\frac{-\frac{v}{c}z + (1 - \sqrt{1 - \frac{v}{c}})}{(1 - \sqrt{1 - \frac{v}{c}})z - \frac{v}{c}} = z \Rightarrow -\frac{v}{c}z + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v}{c}}\right) = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v}{c}}\right)z^2 - \frac{v}{c}z \Rightarrow z^2 = 1.$$

Tato rovnice nám ukazuje, že samodružné body budou dva $z \in \{-1; 1\}$. Jsou to body, které se nachází na ose x .

Zbývá nám vyšetřit zobrazení při pohybu rovnoběžném s osou y . Samodružné body zjistíme z (5.49)

$$\begin{aligned} \frac{-i\frac{v}{c}z + (\sqrt{1 - \frac{v}{c}} - 1)}{(1 - \sqrt{1 - \frac{v}{c}})z - i\frac{v}{c}} = z &\Rightarrow -i\frac{v}{c}z + \left(\sqrt{1 - \frac{v}{c}} - 1\right) = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v}{c}}\right)z^2 - i\frac{v}{c}z \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v}{c}}\right) = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v}{c}}\right)z^2 \Rightarrow z^2 = -1. \end{aligned}$$

Tady nám vychází opět dva body zobrazující se samy na sebe, jsou jimi $z \in \{-i; i\}$. Vzhledem k tomu, že jde o imaginární jednotky, náleží obě ose y , každá v jedné její poloose.

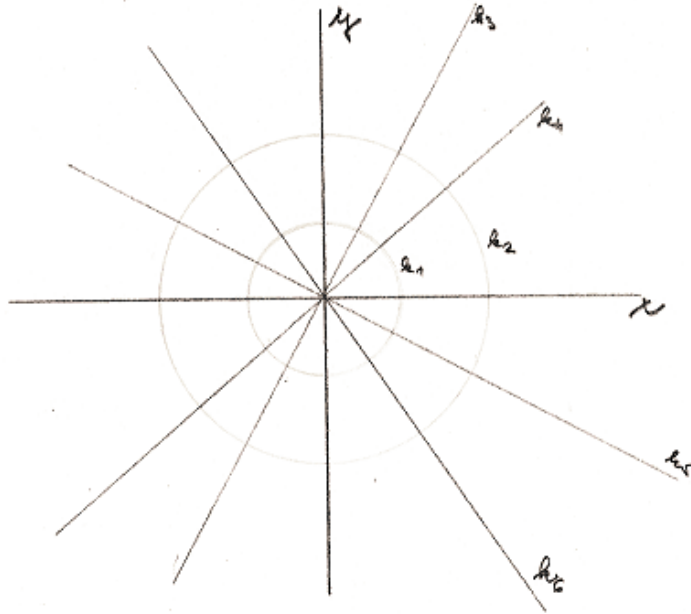
Nyní víme, o které body zobrazení se lze „opřít“. Abychom určili typ lineární transformace, musíme vhodně dosadit do rovnice (4.10) Začneme s koeficienty u osy z , jsou jimi $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v}{c}}$ a

$$\delta = \sqrt{1 + \frac{v}{c}}, \beta = 0, \delta = 0:$$

$$K = \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}} + \sqrt{1 + \frac{v}{c}} - \sqrt{\left[\sqrt{1 - \frac{v}{c}} - \sqrt{1 + \frac{v}{c}}\right]^2}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}} + \sqrt{1 + \frac{v}{c}} + \sqrt{\left[\sqrt{1 - \frac{v}{c}} - \sqrt{1 + \frac{v}{c}}\right]^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}} + \sqrt{1 + \frac{v}{c}} - \sqrt{1 - \frac{v}{c}} + \sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}} + \sqrt{1 + \frac{v}{c}} + \sqrt{1 - \frac{v}{c}} - \sqrt{1 + \frac{v}{c}}} = \frac{2\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{2\sqrt{1 - \frac{v}{c}}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}$$

Koeficient nám vychází jako kladné reálné číslo, transformace tak bude hyperbolická, odpovídající podobnému zobrazení.



Obrázek 6: Samodružné body 0 a nekonečno

Dále zjistíme, jak to bude se zobrazením ve směru osy x . Koeficienty jsou $\alpha = \delta = -\frac{v}{c}, \beta = \gamma = 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ a ty dosadíme opět do rovnice (4.10)

$$K = \frac{-\frac{v}{c} - \frac{v}{c} - \sqrt{\left[-\frac{v}{c} + \frac{v}{c}\right]^2 + 4 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right]^2}}{-\frac{v}{c} - \frac{v}{c} + \sqrt{\left[-\frac{v}{c} + \frac{v}{c}\right]^2 + 4 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right]^2}} =$$

$$= \frac{-2\frac{v}{c} - \sqrt{4 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]^2}}{-2\frac{v}{c} + \sqrt{4 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]^2}} = \frac{-2\frac{v}{c} - 2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]}{-2\frac{v}{c} + 2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]}.$$

Zbývá už jen zkrátit a máme další koeficient, který spadá do kladných reálných čísel.

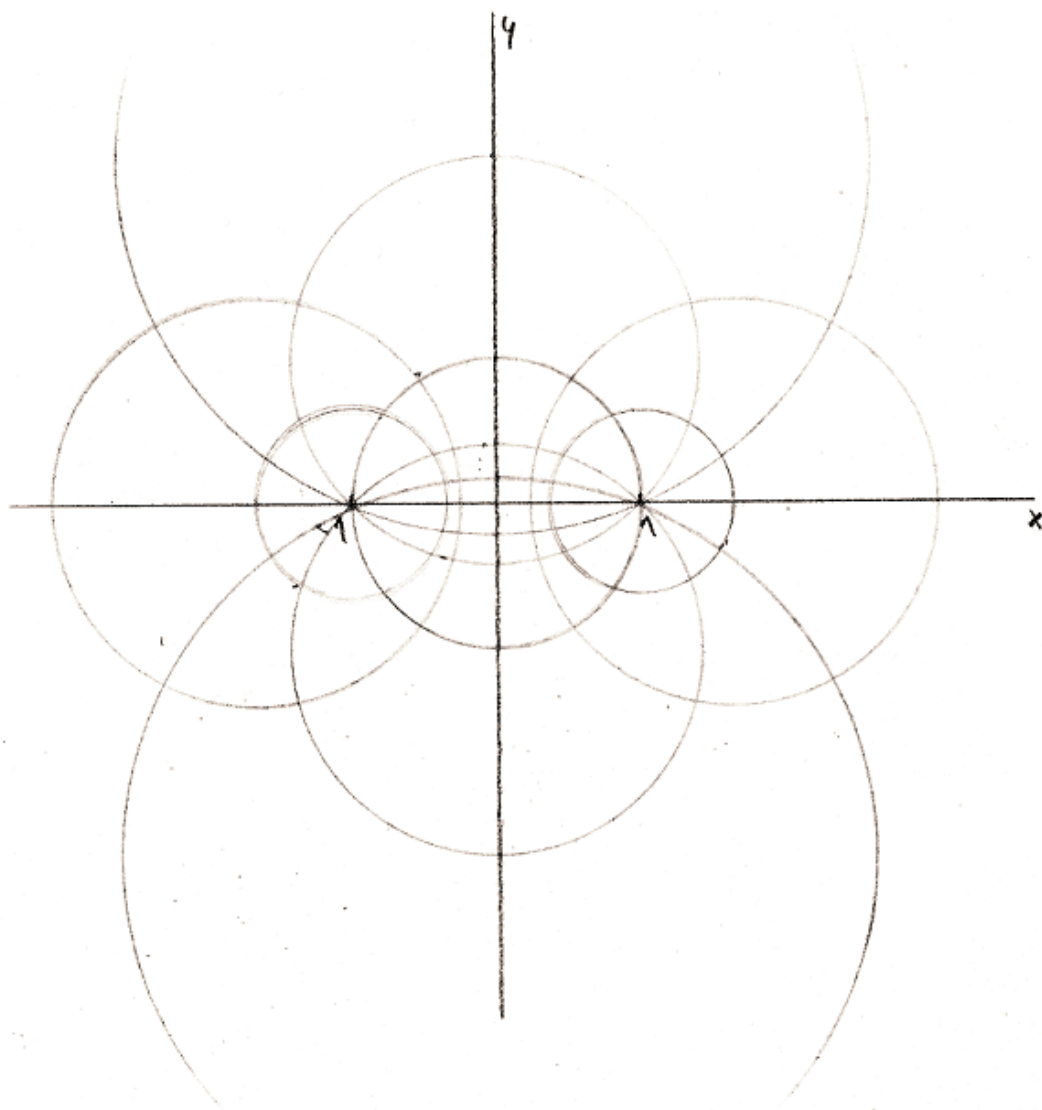
$$K = \frac{\frac{v}{c} + \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]}{\frac{v}{c} - \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]}$$

Stejně jako při pohybu ve směru osy z , budeme mít zobrazení hyperbolické. Na obrázku vidíme, jak se budou body měnit po jednotlivých kružnicích:

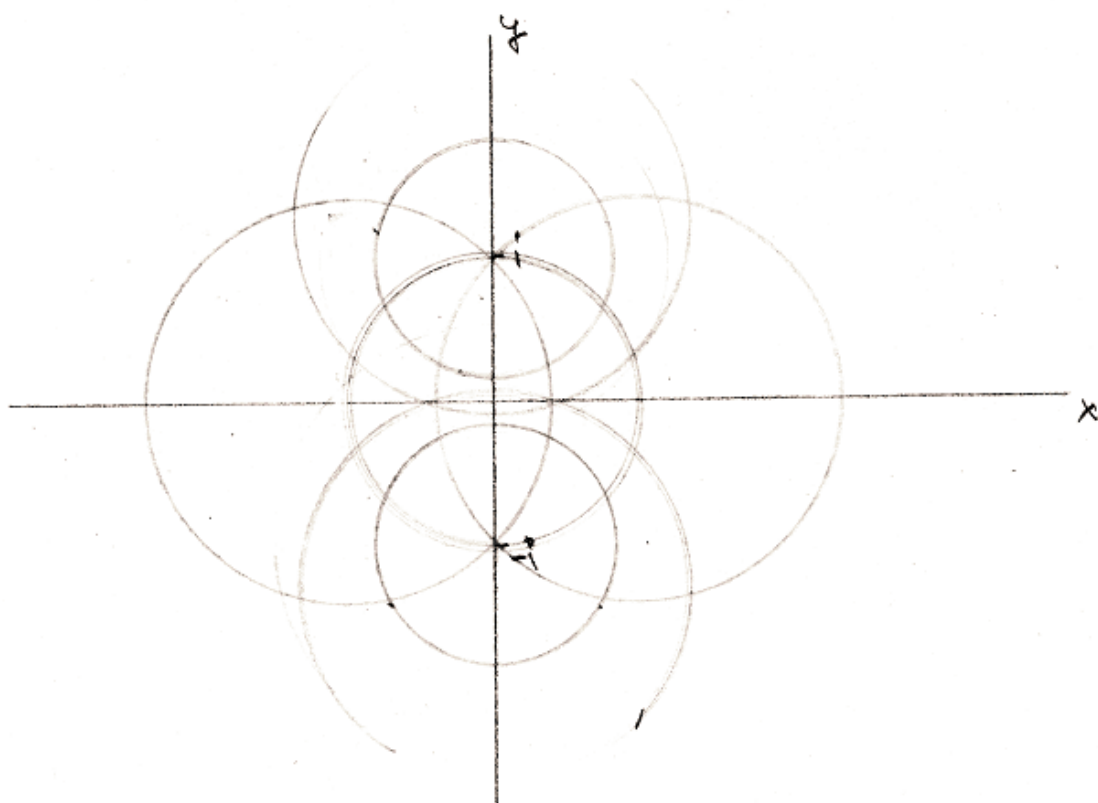
Pro směr osy y bychom postupovali stejnou cestou, proto bude stačit, napíšeme-li, že výsledný koeficient je:

$$K = \frac{-2i\frac{v}{c} - 2i \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]}{-2i\frac{v}{c} + 2i \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]},$$

který je po zkrácení identický s předchozím a proto opět platí, že v pohybu ve směru osy y , bude nalezená lineární lomená funkce hyperbolická. Všechny tyto konstanty pro pohyb ve směru kterékoli osy je kladné reálné číslo.



Obrázek 7: Samodružné body $-1, 1$



Obrázek 8: Samodružné body $-i, i$

5.3 Rotace kolem jednotlivých os

Jak dopadnou souřadnice jednotlivých hvězd, otočí-li pozorovatel příkladně hlavou nebo se raketa jinak natočí? Změnu souřadnic zjistíme, aplikujeme-li na rovnice pro pohyby v jednotlivých směrech rovnice rotace. Budeme se zabývat podrobněji opět směry po osách x, z a směr osy y si jen naznačíme a seznámíme se s výsledkem.

5.3.1 Rotace kolem osy z

Začneme opět s osou z , bude se poněkud lišit od zbylých dvou. Vyjádřeme si nejprve souřadnice rotace pro danou osu. Nejprve uvedeme, které osy se budou otáčet a které nikoli.

$$x' = x \cos \gamma + y \sin \gamma, \quad y' = -x \sin \gamma + y \cos \gamma, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (5.51)$$

V dalším postupu budeme počítat s úpravou sféry na stejné podmínky, jaké jsme měli v případě transformace souřadnic. Upravíme tedy podle nich souřadnice s užitím vzorců (5. 8):

$$X' = \frac{x'}{ct'} = \frac{x \cos \gamma + y \sin \gamma}{t}, \quad Y' = \frac{y'}{ct'} = \frac{-x \sin \gamma + y \cos \gamma}{ct}, \quad Z' = \frac{z'}{ct'} = \frac{z}{ct}. \quad (5.52)$$

Ted' je ještě převedeme na sférické souřadnice:

$$\xi' = \frac{1}{2} X' = \frac{x \cos \gamma + y \sin \gamma}{2ct} = \frac{1}{2} \left(\frac{x \cos \gamma}{ct} + \frac{y \sin \gamma}{ct} \right) = \quad (5.53)$$

$$= \frac{1}{2} [2\xi \cos \gamma + 2\eta \sin \gamma] = \xi \cos \gamma + \eta \sin \gamma$$

$$\eta' = \frac{1}{2} Y' = \frac{-x \sin \gamma + y \cos \gamma}{2ct} = \frac{1}{2} \left(\frac{-x \sin \gamma}{ct} + \frac{y \cos \gamma}{ct} \right) = \quad (5.54)$$

$$= \frac{1}{2} [-2\xi \sin \gamma + 2\eta \cos \gamma] = -\xi \sin \gamma + \eta \cos \gamma$$

$$\zeta' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Z' = \frac{1}{2} + \frac{z}{2t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (2\zeta - 1) = \frac{1}{2} + \zeta - \frac{1}{2} = \zeta \quad (5.55)$$

V tuto chvíli přestává být z souřadnicí a stává se opět komplexní souřadnicí, abychom mohli zjistit rovnici pro rotaci kolem osy z . Dosadíme tedy výše upravené souřadnice do (3.7):

$$\begin{aligned} z' &= \frac{\xi \cos \gamma + \eta \sin \gamma + i(-\xi \sin \gamma + \eta \cos \gamma)}{1 - \zeta} = \frac{\xi \cos \gamma + \eta \sin \gamma - i\xi \sin \gamma + i\eta \cos \gamma}{1 - \zeta} = \\ &= \frac{\xi(\cos \gamma - i \sin \gamma) + i\eta(-i \sin \gamma + \cos \gamma)}{1 - \zeta} = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} (-i \sin \gamma + \cos \gamma) \\ z' &= z(-i \sin \gamma + \cos \gamma) \end{aligned} \quad (5.56)$$

Jak vidíme, jde opět o nejlépe a nejjednodušeji upravitelnou rovnici, navíc stále zachovávající

lineární tvar. A jak by to vypadalo se samozdruženými body? Snadno si odvodíme následující podmínku. Dáme-li rovnici (5.56) rovnou z , zjistíme, že jediným způsobem, jak rovnost zajistit, je dát jej opět do počátku, to znamená $z = 0$, druhý samodružný bod se nachází v nekonečnu, tedy $z = \infty$.

5.3.2 Rotace kolem osy x

Složitější to už bude u osy x , kde se neobejdeme bez převedení souřadnici x a y na komplexní souřadnici z . Začneme ale od začátku:

$$x' = x, \quad y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad z' = -y \sin \alpha + z \cos \alpha, \quad t' = t, \quad (5.57)$$

těmito rovnicemi upravíme rovnice (5.8):

$$X' = \frac{x'}{ct'} = \frac{x}{ct}, \quad Y' = \frac{y'}{ct'} = \frac{y \cos \alpha + z \sin \alpha}{ct}, \quad Z' = \frac{z'}{ct'} = \frac{-y \sin \alpha + z \cos \alpha}{ct}. \quad (5.58)$$

Takto bychom měli obecné souřadnice. Stejně jako při odvozování transformací souřadnic musíme převést sféru na sféru na s jednotkovým průměrem a pozorovatele musíme přesunout do bodu P . Využijeme k tomu už dříve odvozených vztahů (5.11) a (5.12):

$$\xi' = \frac{1}{2}X' = \frac{1}{2}2\xi = \xi \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{1}{2}Y' = \frac{y \cos \alpha + z \sin \alpha}{2ct} = \frac{1}{2} \left(\frac{y \cos \alpha}{t} + \frac{z \sin \alpha}{ct} \right) = \\ &= \frac{1}{2}[2\eta \cos \alpha + (2\xi - 1) \sin \alpha] = \eta \cos \alpha + \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \sin \alpha \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \zeta' &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Z' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-y \sin \alpha}{ct} + \frac{z \cos \alpha}{ct} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[-2\eta \sin \alpha + (2\xi - 1) \cos \alpha] = \frac{1}{2} - \eta \sin \alpha + \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \cos \alpha \end{aligned} \quad (5.61)$$

Ted' máme vše potřebné, abychom mohli zjistit rotaci, dosadíme tedy do vzorce (3.7) pro zjištění komplexního čísla (v našem případě jde o komplexní souřadnici):

$$z' = \frac{\xi + i \left[\eta \cos \alpha + \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \sin \alpha \right]}{1 - \left[\frac{1}{2} - \eta \sin \alpha + \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \cos \alpha \right]} = \frac{\xi + i\eta \cos \alpha + i\zeta \sin \alpha - i\frac{1}{2} \sin \alpha}{\frac{1}{2} + \eta \sin \alpha - \zeta \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha}$$

V tomto okamžiku musíme převést sférické souřadnice na souřadnice komplexní roviny, užijeme vzorce (3.9), (3.10), (3.11), zároveň je rozšíříme jejich společným jmenovatelem $x^2 + y^2 + 1$ a číslem

2, abychom se zbavili zlomků:

$$z' = \frac{2x + 2iy \cos \alpha + 2i(x^2 + y^2) \sin \alpha - i(x^2 + y^2 + 1) \sin \alpha}{x^2 + y^2 + 1 + 2y \sin \alpha - 2(x^2 + y^2) \cos \alpha + (x^2 + y^2 + 1) \cos \alpha}$$

za použití vzorců (5.36), (5.37), (5.38) upravíme vzniklou rovnici a dále už ji jen upravíme do vhodného tvaru.

$$\begin{aligned} z' &= \frac{2\frac{1}{2}(z + \bar{z}) + 2i\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \cos \alpha + 2iz\bar{z} \sin \alpha - i(z\bar{z} + 1) \sin \alpha}{z\bar{z} + 1 + 2\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \sin \alpha - 2z\bar{z} \cos \alpha + (z\bar{z} + 1) \cos \alpha} = \\ &= \frac{z + \bar{z} + (z - \bar{z}) \cos \alpha + 2iz\bar{z} \sin \alpha - iz\bar{z} \sin \alpha + i \sin \alpha}{z\bar{z} + 1 + \frac{1}{i}(z - \bar{z}) \sin \alpha - 2z\bar{z} \cos \alpha + (z\bar{z} + 1) \cos \alpha} = \\ &= \frac{z + \bar{z} + z \cos \alpha - \bar{z} \cos \alpha + iz\bar{z} \sin \alpha + \sin \alpha}{z\bar{z} + 1 - iz \sin \alpha + i\bar{z} \sin \alpha - z\bar{z} \cos \alpha + \cos \alpha} = \\ &= \frac{iz\bar{z} \sin \alpha + z(1 + \cos \alpha) + \bar{z}(1 - \cos \alpha) + \sin \alpha}{z\bar{z}(1 - \cos \alpha) - iz \sin \alpha + i\bar{z} \sin \alpha + (1 + \cos \alpha)} = \\ &= \frac{i \sin \alpha \left[iz\bar{z} + \frac{z(1 + \cos \alpha)}{i \sin \alpha} + \frac{\bar{z}(1 - \cos \alpha)}{i \sin \alpha} - 1 \right]}{(1 - \cos \alpha) \left[z\bar{z} - iz \sin \alpha(1 - \cos \alpha) + i \frac{\bar{z} \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)} + \frac{(1 + \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha)} \right]}. \end{aligned}$$

Nyní si vedle musíme ukázat, jaká pravidla platí pro jednotlivé zlomky, abychom je mohli bez obav zkrátit či nahradit:

$$-\frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} = -\frac{(1 - \cos^2 \alpha)}{(1 - \cos \alpha)^2} = -\frac{\sin^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} = \frac{i \sin^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} \quad (5.62)$$

$$\frac{\bar{z} + \frac{1 + \cos \alpha}{i \sin \alpha}}{\bar{z} - \frac{i \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{[\bar{z} i \sin \alpha + (1 + \cos \alpha)](1 - \cos \alpha)}{(i \sin \alpha)[\bar{z}(1 - \cos \alpha) - i \sin \alpha]} = 1 \quad (5.63)$$

Snadno nahlédneme, že poslední dva členy opravdu lze zkrátit, jakmile ho roznásobíme a uvědomíme si, že podle vzorce $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ jsou poslední člen v čitateli a poslední člen ve jmenovateli jsou jeden a tentýž.

Nyní se můžeme vrátit k rotaci a za použití (5.57) upravíme i jmenovatele zlomku:

$$z' = \frac{i \sin \alpha \left[z + \frac{1 - \cos \alpha}{i \sin \alpha} \right] \left[\bar{z} + \frac{1 + \cos \alpha}{i \sin \alpha} \right]}{(1 - \cos \alpha) \left[z + \frac{1 + \cos \alpha}{i \sin \alpha} \right] \left[\bar{z} - \frac{i \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \right]},$$

za použití vzorce (5.64) můžeme členy s komplexně sdruženým \bar{z} pokrátit a získáme tak výslednou lineární lomenou funkci předpokládaného tvaru $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$:

$$z' = \frac{iz \sin \alpha + (1 - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha)z + i \sin \alpha} \quad (5.64)$$

Na závěr ještě zjistíme z rovnice (5.65), kde má rotace samodružné body:

$$\begin{aligned}\frac{i \sin \alpha z + (1 - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha)z + i \sin \alpha} = z &\Rightarrow i \sin \alpha z + (1 - \cos \alpha) = (1 - \cos \alpha)z^2 + i z \sin \alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow z^2 = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = 1 \Rightarrow z \in \{-1; 1\}.\end{aligned}$$

Tímto jsme zjistili, že pokud budou body rotovat kolem osy x , samodružné body zůstanou ve stejných místech jako při pohybu ve směru osy x

5.3.3 Rotace kolem osy y

Do rotace kolem této osy se podrobně pouštět nebudeme. V předchozích výpočtech jsme si ukázali analogické řešení rovnic po „vzoru x “. Uvedeme tedy jen, základní rovnice rotace kolem osy y a následně výsledek, ke kterému dospějeme řešením celého postupu. Nejprve se tedy seznámme s rovnicemi.

$$x' = x \cos \beta - z \sin \beta, y' = y, z' = x \sin \beta + z \cos \beta, t' = t, \quad (5.65)$$

Dále bychom pokračovali postupem známým z předchozí rovnice a dospěli bychom k závěrečné rovnici rotace kolem osy y , která je následující:

$$z' = -\frac{z \sin \beta + (1 - \cos \beta)}{(1 - \cos \beta)z - \sin \beta} \quad (5.66)$$

Pro úplnost ještě vyšetříme samodružné body, položíme zobrazovací funkci (5.67) rovnu z :

$$\begin{aligned}\frac{(-1)[\sin \beta z + (1 - \cos \beta)]}{(1 - \cos \beta)z - \sin \beta} = z &\Rightarrow (-1)[\sin \beta z + (1 - \cos \beta)] = (1 - \cos \beta)z^2 - \sin \beta z \Rightarrow \\ &\Rightarrow z^2 = -\frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \beta} = -1 \Rightarrow z \in \{-i; i\}.\end{aligned}$$

I v tomto případě jsou samodružné body stejné, jako při transformaci ve směru osy y .

Nyní tedy známe rovnice rotací kolem všech os, rotací jsou logicky ovlivněny pouze dvě souřadnice ze tří. Třetí souřadnice je ta, kolem které se daný bod otáčí. Všechny rovnice zachovávají tvar lineární lomené funkce $z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$. Užití těchto „rotačních rovnic“ můžeme ukázat hned v následující podkapitole.

5.4 Zkouška správnosti kapitoly 5.1

Abychom měli nějakou zpětnou vazbu, zda-li jsme počítali správně, zkusme nyní odvodit vztahy upravující souřadnice při pohybu ve směru os x, y . Oba případy budeme vyjadřovat pomocí rovnice pro pohyb ve směru osy z . Předpokládejme, v obou případech, že se pohybujeme ve směru pozorované osy. Abychom si mohli odvodit vztahy, musíme nejprve směr osy x nebo y změnit na směr

osy z . Každé otočení bude o jiný úhel, velkou roli v tom hraje tzv. „pravidlo pravé ruky“, neboli - musíme si správně uvědomit, která osa má kde kladnou a zápornou poloosu. V dalším kroku dosadíme rovnici na transformaci souřadnic a abychom správně dokončili celou zkoušku, potřebujeme se vrátit do správného směru pohybu, proto otočíme osy zpět do své původní polohy. Pokud byly naše výpočty správné, dostaneme rovnice identické s těmi, které jsme odvozovali konkrétně pro dané osy.

5.4.1 Pohyb ve směru osy x

Pro ověření transformace v pohybu této osy, budeme otáčet souřadnicový systém kolem osy y za použití rovnice (5.67). Nejprve musíme otočit kladnou poloosu x na kladnou poloosu osy z , a to o $\frac{\pi}{2}$. Musíme si připomenout, že z v rovnicích neznačí osu, ale komplexní proměnnou. Dosadíme do rovnice rotace kolem y :

$$z''' = \frac{-\left(z \sin \frac{\pi}{2} + 1 - \cos \frac{\pi}{2}\right)}{z(1 - \cos \frac{\pi}{2}) - \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{-z - 1}{z - 1} = \frac{z + 1}{1 - z}.$$

Dále musíme tuto rovnici dosadit do rovnice pro transformaci souřadnic ve směru osy z - (5.24):

$$z'' = z''' \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}} = \frac{z + 1}{1 - z} \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}},$$

Nakonec musíme otočit osu x zpět do správné polohy. Proto do rovnice (5.67) dosadíme $\frac{3\pi}{2}$ pro otočení osy:

$$z' = \frac{-(z'' \sin \frac{3\pi}{2} + 1 - \cos \frac{3\pi}{2})}{z''(1 - \cos \frac{3\pi}{2}) - \sin \frac{3\pi}{2}} = \frac{z'' - 1}{z'' + 1}.$$

a dosadíme upravenou rovnici pro transformaci souřadnic:

$$z' = \frac{\frac{z+1}{1-z} \frac{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}} - 1}{\frac{z+1}{1-z} \frac{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}} + 1}.$$

Rovnici rozšíříme zlomkem $\frac{(1-z)\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{(1-z)\sqrt{1+\frac{v}{c}}}$:

$$z' = \frac{(z+1)\sqrt{1-\frac{v}{c}} - (1-z)\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{(z+1)\sqrt{1-\frac{v}{c}} + (1-z)\sqrt{1+\frac{v}{c}}} = \frac{z\left[\sqrt{1-\frac{v}{c}} + \sqrt{1+\frac{v}{c}}\right] + \left[\sqrt{1-\frac{v}{c}} - \sqrt{1+\frac{v}{c}}\right]}{z\left[\sqrt{1-\frac{v}{c}} - \sqrt{1+\frac{v}{c}}\right] + \left[\sqrt{1-\frac{v}{c}} + \sqrt{1+\frac{v}{c}}\right]}$$

Abychom se dostali ke hledanému výsledku, rozšíříme celý zlomek členem $\sqrt{1-\frac{v}{c}} - \sqrt{1+\frac{v}{c}}$:

$$z' = \frac{\left[\frac{z\left(\sqrt{1-\frac{v}{c}} + \sqrt{1+\frac{v}{c}}\right) + \left(\sqrt{1-\frac{v}{c}} - \sqrt{1+\frac{v}{c}}\right)}{z\left(\sqrt{1-\frac{v}{c}} - \sqrt{1+\frac{v}{c}}\right) + \left(\sqrt{1-\frac{v}{c}} + \sqrt{1+\frac{v}{c}}\right)} \right] \left(\sqrt{1-\frac{v}{c}} - \sqrt{1+\frac{v}{c}}\right)}{\left(\sqrt{1-\frac{v}{c}} - \sqrt{1+\frac{v}{c}}\right)} =$$

$$= \frac{z \left(1 - \frac{v}{c} - 1 - \frac{v}{c}\right) + \left[1 - \frac{v}{c} - 2\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + 1 + \frac{v}{c}\right]}{z \left[1 - \frac{v}{c} - 2\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + 1 + \frac{v}{c}\right] + \left(1 - \frac{v}{c} - 1 - \frac{v}{c}\right)}$$

po poslední úpravě, sečtení členů, uvidíme, že rovnice pro komplexní proměnnou z se opravdu rovná rovnici (5.42), kterou jsme odvodili právě pro pohyb ve směru osy x :

$$z' = \frac{-\frac{v}{c}z + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)}{\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)z - \frac{v}{c}}$$

Pohyb ve směru osy x máme tedy ověřený, nyní přejdeme k pohybu ve směru osy y

5.4.2 Pohyb ve směru osy y

Stejně jako u osy x musíme nejprve otočit kladnou poloosu osy y na kladnou poloosu osy z . Jak vidíme z obrázku, budeme otáčet kolem osy x , použijeme tedy rovnici (5.65) a dosadíme do ní úhel o velikosti $\frac{3\pi}{2}$:

$$z''' = \frac{(zi \sin \frac{3\pi}{2} + 1 - \cos \frac{3\pi}{2})}{z(1 - \cos \frac{3\pi}{2}) + i \sin \frac{3\pi}{2}} = \frac{-iz + 1}{z - i}.$$

opět dosadíme do známé rovnice pro pohyb rovnoběžný s osou z – (5.24):

$$z'' = z''' \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}} = \frac{-iz + 1}{z - i} \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}},$$

v tomto okamžiku musíme opět vrátit osu y na své místo, dosadíme tedy do rovnice (5.24) tentokrát úhel velikosti $\frac{\pi}{2}$:

$$z' = \frac{(z''i \sin \frac{\pi}{2} + 1 - \cos \frac{\pi}{2})}{z(1 - \cos \frac{\pi}{2}) + i \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{iz + 1}{z + i}.$$

Ted' můžeme opět dosadit rovnici transformace do rovnice rotace a upravit:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{i \left(\frac{-iz+1}{z-i} \frac{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}} \right) + 1}{\frac{-iz+1}{z-i} \frac{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}} + i} \left[\frac{(z-i)\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{(z-i)\sqrt{1+\frac{v}{c}}} \right] = \frac{(z+i)\sqrt{1-\frac{v}{c}} + (z-i)\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{(-iz+1)\sqrt{1-\frac{v}{c}} + i(z-i)\sqrt{1+\frac{v}{c}}} = \\ &= \frac{\left[z \left(\sqrt{1-\frac{v}{c}} + \sqrt{1+\frac{v}{c}} \right) + i \left(\sqrt{1-\frac{v}{c}} - \sqrt{1+\frac{v}{c}} \right) \right] \left(\sqrt{1-\frac{v}{c}} - \sqrt{1+\frac{v}{c}} \right)}{\left[zi \left(\sqrt{1+\frac{v}{c}} - \sqrt{1-\frac{v}{c}} \right) + \left(\sqrt{1-\frac{v}{c}} + \sqrt{1+\frac{v}{c}} \right) \right] \left(\sqrt{1-\frac{v}{c}} - \sqrt{1+\frac{v}{c}} \right)} = \\ &= \frac{z \left(1 - \frac{v}{c} - 1 - \frac{v}{c} \right) + i \left[1 - \frac{v}{c} - 2\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + 1 + \frac{v}{c} \right]}{iz \left[2\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - 1 - \frac{v}{c} - 1 + \frac{v}{c} \right] + \left(1 - \frac{v}{c} - 1 - \frac{v}{c} \right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-2z\frac{v}{c} + i(2 - 2\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2})i}{iz(2\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} - 2) - 2\frac{v}{c}i}.$$

Dostáváme tak tutéž rovnici, jako při odvození pohybu ve směru osy y - (5.49):

$$z' = \frac{-i\frac{v}{c}z + \left(\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} - 1\right)}{\left(1 - \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}\right)z - i\frac{v}{c}},$$

V obou případech jsme dokázali, že naše výpočty byly správné. Ačkoli se to na první pohled nezdá, ověřili jsme tak správnost rovnice pro *Pohyb po ose z*, a to hned dvakrát. Můžeme tedy klidně říci, že jsme od počátku počítali správně. Kdybychom věděli hned od počátku, že rovnice (5.24) na transformaci souřadnic při pohybu rovnoběžném s osou z je správná, mohli jsme tyto rovnice odvodit tímto způsobem.

5.5 Skládání transformací

Vraťme se nyní od rotace zpět k pohybům ve směrech os. Jakým směrem bychom se pohybovali, kdybychom zjišťovali pohyb mezi třemi vztažnými soustavami? Pro představu si uveďme nějaký příklad. Mějme pozorovatele, nacházejícího se ve vztažné soustavě, která se vůči druhé a třetí soustavě nepohybuje. Dále pak mějme příkladně raketu, letící rychlostí blízkou rychlosti světla a uvnitř rakety malý modelový vláček, který se také pohybuje vysokou rychlostí stejným směrem, jako letí raketa. Jak puštěný vláček však uvidí pozorovatel klidné vztažné soustavy? K tomu nám poslouží složení funkcí, prakticky jde o složení dvou transformací ve směru jedné z os. Zůstane i tato složená funkce lineární lomenou funkcí tvaru: $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$? Jak se nám celková transformace změní? A jak by to vlastně dopadlo s rychlostmi pohybu rakety a vláčku? Můžeme se také ještě podívat na skládání rychlostí, zdali z našich výpočtů vyplyne stejný závěr jako u speciální teorie relativity.

Abychom mohli začít pracovat, musíme si nejprve označit rychlosti. Označme rychlost rakety v_1 , rychlost vláčku v ní pak bude v_2 . Jako v_3 označme rychlost vláčku, avšak vůči pozorovateli v „klidné“ soustavě. Dále v těchto výpočtech budeme uvažovat rychlost světla $c = 1$. V průběhu upravování nám výsledek nijak neovlivní.

5.5.1 Skládání transformací ve směru osy z

Představme si nejprve, že zmiňovaná raketa se pohybuje ve směru osy z . Pro tento směr použijeme rovnici (5.24) a dosadíme do ní nejprve rychlost rakety (uvažujeme $c = 1$):

$$z'' = z\sqrt{\frac{1 - v_1}{1 + v_1}}.$$

Dále si vyjádříme rychlost pohybujícího se vláčku vůči raketě:

$$z' = z'' \sqrt{\frac{1-v_2}{1+v_2}},$$

nyní složíme a upravíme funkce, abychom zjistili, jakou rychlostí se pohybuje vláček vůči pozorovateli:

$$z' = z \sqrt{\frac{1-v_1}{1+v_1}} \sqrt{\frac{1-v_2}{1+v_2}} = z \sqrt{\frac{(1-v_1)(1-v_2)}{(1+v_1)(1+v_2)}}. \quad (5.67)$$

V této chvíli můžeme říci, že skládání zachovává lineární lomenou funkci a zůstává ve stejném směru, ve kterém byla. Pokračujme však dále a zjistíme, jakým způsobem bychom vyjádřili rychlost vláčku v_3 :

$$z' = z \sqrt{\frac{1-v_3}{1+v_3}}$$

Porovnejme tuto rovnici vůči funkci ze dvou složených rychlostí:

$$z \sqrt{\frac{1-v_3}{1+v_3}} = z \sqrt{\frac{(1-v_1)(1-v_2)}{(1+v_1)(1+v_2)}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1-v_3}{1+v_3}} = \sqrt{\frac{(1-v_1)(1-v_2)}{(1+v_1)(1+v_2)}}$$

Umocníme obě strany rovnice a vyjádříme v_3 :

$$\begin{aligned} \frac{1-v_3}{1+v_3} &= \frac{(1-v_1)(1-v_2)}{(1+v_1)(1+v_2)} \Rightarrow (1-v_1)(1-v_2)(1+v_3) = (1+v_1)(1+v_2)(1-v_3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1+v_3)(1-v_1-v_2+v_1v_2) = (1+v_1+v_2+v_1v_2)(1-v_3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2v_1-2v_2 = -v_3[(1+v_1+v_2+v_1v_2) + (1-v_1-v_2+v_1v_2)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2v_1+2v_2 = v_3(2+2v_1v_2) \Rightarrow v_3 = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2} \end{aligned}$$

Na závěr doplníme pro názornost rychlost světla:

$$v_3 = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}$$

Vrátíme-li se ke kapitole 1.2.3 zjistíme, že jsme právě odvodili rovnici na skládání relativistických rychlostí.

5.5.2 Skládání transformací ve směru osy x

Vyjádříme si rychlost rakety, použijeme k tomu rovnici (5.41), pro pohyb rovnoběžný s osou x (opět uvažujeme $c = 1$, jde o konstantu a výslednou funkci neovlivní).

$$z'' = \frac{-v_1 z + (1 - \sqrt{1-v_1^2})}{(1 - \sqrt{1-v_1^2})z - v_1},$$

ještě vyjádříme rychlost vláčku v raketě:

$$z' = \frac{-v_2 z'' + (1 - \sqrt{1 - v_2^2})}{(1 - \sqrt{1 - v_2^2} z'' - v_2)},$$

Dosaďme opět rychlost rakety do rychlosti vláčku, abychom získali výslednou rychlost.

$$\begin{aligned} z' &= \frac{-v_2 \left[\frac{-v_1 z + (1 - \sqrt{1 - v_1^2})}{(1 - \sqrt{1 - v_1^2} z - v_1)} \right] + (1 - \sqrt{1 - v_2^2})}{(1 - \sqrt{1 - v_2^2} \left[\frac{-v_1 z + (1 - \sqrt{1 - v_1^2})}{(1 - \sqrt{1 - v_1^2} z - v_1)} \right] - v_2} = \\ &= \frac{-v_2 [-v_1 z + (1 - \sqrt{1 - v_1^2})] + [(1 - \sqrt{1 - v_1^2})z - v_1](1 - \sqrt{1 - v_2^2})}{(1 - \sqrt{1 - v_2^2})[-v_1 z + (1 - \sqrt{1 - v_1^2})] - v_2[(1 - \sqrt{1 - v_1^2})z - v_1]} = \\ &= \frac{v_2 v_1 z + v_2(1 - \sqrt{1 - v_1^2}) - v_1(1 - \sqrt{1 - v_2^2}) + (1 - \sqrt{1 - v_1^2})(1 - \sqrt{1 - v_2^2})z}{-v_1 z(1 - \sqrt{1 - v_2^2}) + (1 - \sqrt{1 - v_2^2})(1 - \sqrt{1 - v_1^2}) - v_2(1 - \sqrt{1 - v_1^2})z + v_1 v_2} \end{aligned}$$

Poslední úpravou získáváme rovnici tvaru $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, tedy lineární lomenou funkcí:

$$z' = \frac{z[v_2 v_1 + (1 - \sqrt{1 - v_1^2})(1 - \sqrt{1 - v_2^2})] + [v_2(1 - \sqrt{1 - v_1^2}) - v_1(1 - \sqrt{1 - v_2^2})]}{-z[v_1(1 - \sqrt{1 - v_2^2}) + v_2(1 - \sqrt{1 - v_1^2})z] + [(1 - \sqrt{1 - v_2^2})(1 - \sqrt{1 - v_1^2}) + v_1 v_2]}, \quad (5.68)$$

kde $\alpha = \delta = [v_2 v_1 + (1 - \sqrt{1 - v_1^2})(1 - \sqrt{1 - v_2^2})]$ a $\beta = \gamma = [v_2(1 - \sqrt{1 - v_1^2}) - v_1(1 - \sqrt{1 - v_2^2})]$. Zůstaly zachovány vlastnosti transformací z funkcí pro transformaci souřadnic v pohybu rovinném ve směru osy x .

5.5.3 Lorentzovy podgrupy

Každé zobrazení projekce hvězd, které jsme tu uvedli, náleží do určité Lorentzovy podgrupy. Je to množina s binární operací, v našem případě je to operace skládání. Prvky množiny jsou lineární lomené funkce, které přiřazují každé hvězdě zobrazené v rovině námi viditelnou polohu, nebo-li souřadnice, a samy se dělí podle směru osy, ve kterém se pohybujeme a pozorujeme hvězdy. Každé toto skládání je uzavřené na určité množině prvků, která tvoří Lorentzovu podgrupu. Všechny tyto grupy mají jednotkový prvek. Je jím lineární lomená funkce s rychlostí $v = 0 \frac{m}{s}$, prakticky to znamená, že vztažná soustava hvězd a vztažná soustava, ve které se nacházíme jsou vůči sobě v klidu. Další podmínkou pro to, aby operace s množinou tvořily grupu, je existence inverzního prvku. Ten je v této množině také, pokud budeme uvažovat pozorování (transformaci souřadnic) při pohybu opačným směrem $v = -v$. Skládání těchto zobrazení je komutativní, což se dá lehce ověřit.

Na podkapitole 5.5.1, kde jsme odvozovali skládání transformací ve směru osy z a také jsme v ní odvodili vzorec na skládání rychlostí. Vezměme první část skládání, kdy jsme složili dvě

transformace s rychlostmi v_1, v_2 , kterými jsme vyjadřovali rychlost v_3 :

$$z\sqrt{\frac{1-v_3}{1+v_3}} = z\sqrt{\frac{(1-v_1)(1-v_2)}{(1+v_1)(1+v_2)}}.$$

Dále jsme vyjádřili vztahy mezi skládáním rychlostí v_1, v_2, v_3 , kde nám vyšla rovnice:

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}.$$

Dosadíme-li do první rovnice vyjádření v_3 , získáme:

$$z\sqrt{\frac{1 - \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}}{1 + \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}}},$$

dále upravíme a zjistíme, že dostáváme stejnou transformaci jako při složení v první rovnici.

$$z\sqrt{\frac{1 - v_1 - v_2 + v_1 v_2}{1 + v_1 + v_2 + v_1 v_2}} = z\sqrt{\frac{(1 - v_1)(1 - v_2)}{(1 + v_1)(1 + v_2)}},$$

Přechod mezi vzorem a obrazem je jednoznačný. Pokud složíme dva vzory, získáváme složený vzor, jehož obraz je stejný, jako obraz složený ze dvou obrazů.

V této bakalářské práci se objevují tři tyto podgrupy a jsou určeny jednotlivými osami, v jejichž směru se pohybujeme. Na svých množinách jsou uzavřené, tedy skládáme-li dvě transformace jednoho směru, tak nám v něm výsledná transformace zůstává. Jako příklad můžeme použít poslední dvě získané rovnice. Rovnice (5.68) dává souřadnice bodu, pokud ho pozorujeme za pohybu ve směru osy z , souřadnice při pohybu ve směru osy x získáme z rovnice (5.69). Pro osu y bychom získali zobrazující funkci stejným postupem jako pro osu x , avšak za použití rovnice (5.49). Ve směrech os x, z jsme transformační lineární lomené funkce odvodili v předchozích kapitolách.[9]

6 Letíme a díváme se

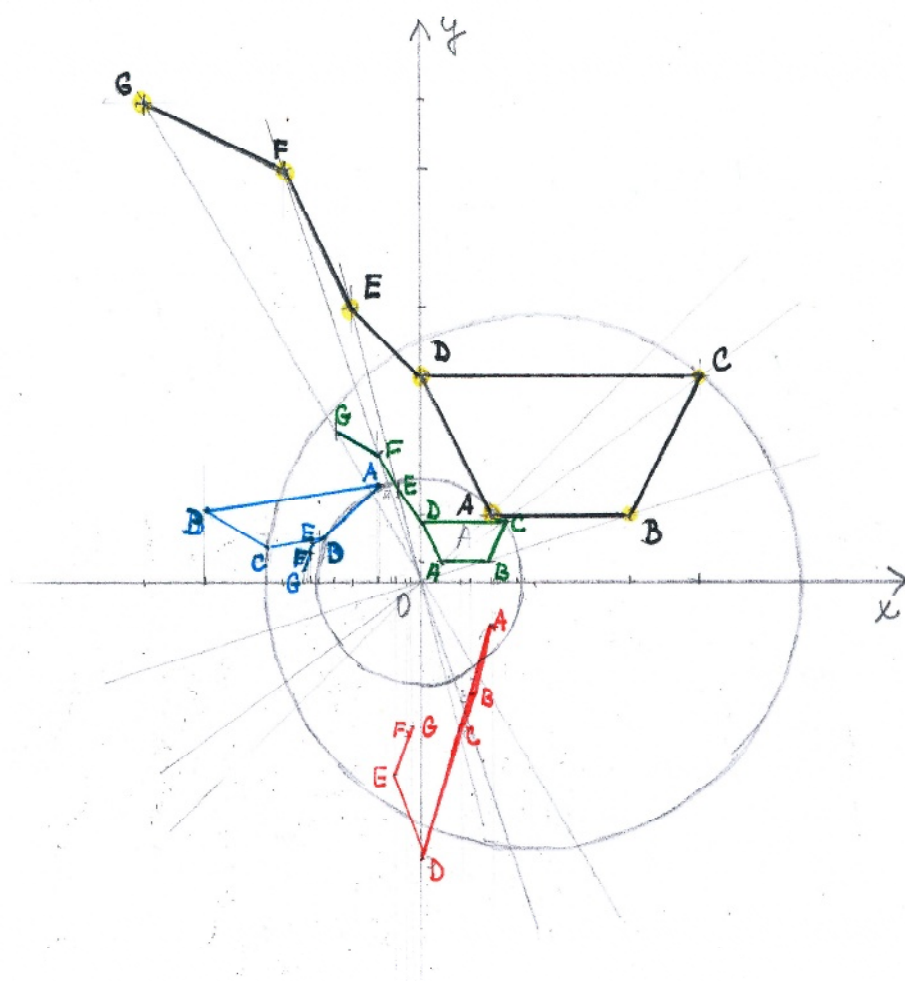
Název bakalářské práce je „*Letíme a díváme se*“. Proč? Představme si, že se nacházíme ve vesmírné raketě a letíme rychlostí blízkou rychlosti světla. Co bychom měli vidět, vyhlédneme-li z okna? Určitě neuvidíme hvězdy tak, jak je vidíme ze Země nebo z kteréhokoli místa, které je vůči vztažné soustavě hvězd v klidu nebo se hýbe nerelativistickou rychlostí.

Tímto „pohledem z okna“ jsme se zabývali v předchozích kapitolách. Pokud se díváme na hvězdy, naše oko nerozliší, že jsou na sféře a nacházejí se v různých vzdálenostech. Pro naše oko jsou rozloženy v rovině, které, jak již bylo zmíněno, říkáme Gaussova rovina komplexních čísel. Ze všech souvislostí, které jsme zjistili, můžeme vyslovit určitý závěr o zobrazení hvězd při jejich pozorování za rychlosti blízké rychlosti světla.

Před vyslovením obecného závěru se podívejme, jak se ztransformuje příkladně souhvězdí Velkého vozu (zvolili jsme jeho podobu tak, jak ji známe ze Země, pokud bychom byli v jiné části galaxie, nemuseli bychom ho vidět vůbec). Na obrázku vidíme, jak se jednotlivé souřadnice změnil. Černou barvou je označen Velký vůz při pozorování z klidné vztažné soustavy. Poletíme-li ve směru osy z , spatříme Velký vůz stejně, jako je zelený vůz na obrázku, souřadnice se nám jakoby „scvrknou“. V obou dalších případech se nám Velký vůz zdeformuje, pohyb ve směru osy x je znázorněn modře a viditelnost vozu při letu ve směru osy y je znázorněna červeně. Pro znázornění jsme zvolili naši pohybovou rychlost $v = 250000000 \frac{m}{s}$ a souřadnice jsme zjišťovali z rovnic (5.24), (5.41) a (5.49). Umístění hvězd Velkého vozu není z reálného zobrazení, volili jsme body pro dobrou názornost.

Kdybychom se v raketě dívali ve směru letu, viděli bychom před sebou „hvězdný kužel“, hvězdy budou seskupeny blízko sebe, jak se jim budeme přibližovat, vzdálenosti mezi nimi se budou více a více podobat reálnému rozložení. Podíváme-li se tedy z bočního okénka lodi, uvidíme jejich transformaci odvozenou z námi zjištěných lineárně lomených funkcí. Velký vůz bychom tak při rychlosti $250000000 \frac{m}{s}$ viděli tak, jak ho můžeme spatřit na obrázku. Pokud bychom se otočili a hleděli z okna na zádi, viděli bychom v dálce prakticky pouze tmou, rozestupy budou stále transformované, ale světlu cesta od hvězd do našeho oka bude trvat delší dobu.

Na závěr je třeba upozornit na to, že jsme si bod, ze kterého promítáme sférické souřadnice do roviny, přesunuli v průběhu bakalářské práce ze středu sféry do bodu P . Zobrazení, které jsme popsali odpovídá pozorování hvězd shora, jako bychom se nacházeli „nad“ hvězdami. Pro pozorování ze středu sféry by se nám změnil úhel pohledu. Hvězdy by se nám promítaly na dvě rovnoběžné poloroviny. Výsledné zobrazení by však bylo téměř stejné.



Obrázek 9: Transformace Velkého vozu

7 Rešerše

V bakalářské práci jsme pracovali hlavně s kontrakcí délek. Proto se v závěru podívejme, jak je tato látka vykládána v učebnicích fyziky pro střední školy a gymnázia, kde se tato látka vyučuje. Bude nás zajímat především správná slovní interpretace kontrakce délek.

7.1 Fyzika pro gymnázia - Speciální teorie relativity

Tato učebnice dobře popisuje dané téma. Kontrakce délek je vyložena v závislosti na dilataci času, se kterou úzce souvisí. Vzťah délek je podrobně odvozen na dvou vztažných soustavách, kde se jedna pohybuje rychlostí $v \rightarrow c$ a je doprovázen ilustracemi. Je správně vyloženo, že je pro nás tyč v pohybující se vztažné soustavě kratší. Tento výklad je nejsrozumitelnější a nejnázornější ze všech. (viz. Příloha 1) [10]

7.2 Přehled středoškolské fyziky

Kapitola o kontrakci délek jasně a stručně vystihuje danou problematiku. Vztah pro kontrakci délek je správně odvozen. Odvození je srozumitelné. Vztah délky tyče a inerciální soustavy, z níž je tyč pozorována a je měřena její délka, je vyloženo správně, a to i závěr: „*Délka tyče i v soustavě, vzhledem k níž se tyč pohybuje rychlostí v , je tedy vždy menší, než délka tyče l_0 , vzhledem k níž je v klidu.*“ (viz. Příloha 2) [11]

7.3 Fyzika II. pro střední školy

Kontrakce délek tu i svým vysvětlením navazuje na dilataci času. Vztah délek mezi vztažnými soustavami zde není přímo odvozen. Výslední závěr souvislosti délky a vztažné soustavy, z níž je délka měřena je správně interpretován. (viz. Příloha 3) [2]

7.4 Přehled středoškolské fyziky. Fyzika, univerzální příručka pro maturanty a uchazeče o studium na vysokých školách

V tomto přehledu je kontrakce délek interpretována velice stručně, spíše jako přehled vzorců. Kontrakce délek je správně rozlišena vzhledem k inerciálním soustavám. (viz. Příloha 4) [3]

7.5 Odmaturuj! z fyziky

Kontrakce délek zde není odvozena. Je správně poukázáno na vztah inerciálních soustav, na jejich ovlivnění délek i na vztah délek mezi sebou. Pro naučení se vztahů kontrakce délek tento výklad stačí. Pokud bychom ji chtěli pochopit, bylo by potřeba podrobnější vysvětlení. Výklad je ale správný. (viz. Příloha 5) [12]

7.6 Fyzika v kostce

V části „Kontrakce (zkracování) délek“ je vyslovena základní myšlenka kontrakce, ne však zcela srozumitelně. Není tu jednoznačně určeno, že ke zkracování dochází pouze ve směru pohybu tělesa. Závěr, určující vztah kontrakce délek a inerciální soustavy, je interpretován správně: „*Pozorovatel v soustavě K naměří délku kratší, než pozorovatel v soustavě K' ; $l < l'$* “. Jednotlivé proměnné jsou v textu vysvětleny. (viz. Příloha 6) [13]

7.7 Albert Einstein - Teorie relativity pro každého

Předem je nutno říci, že se nejedná o učebnici fyziky, ale o populárně naučnou literaturu. „Délková kontrakce“ je zde brána hlavně z historického hlediska. Problém je vyložen na rozdílné velikosti dráhy světla, kterou musí uletět, než dopadne do našeho oka. Výsledný objekt se nám tak má zdát být pootočený o daný úhel α , což má za následek, že jej vidíme kratší. To však není pravda. Tento výklad je, jak víme na základě znalostí získaných z bakalářské práce, chybný. (viz. Příloha 7) [14]

7.8 Shrnutí

Zjistili jsme, že všechny učebnice interpretují výsledný závěr o kontrakci délek správně. Nacházíme-li se v inerciální soustavě, vůči níž se inerciální soustava tyče pohybuje relativistickou rychlostí, budeme měřit délku tyče kratší, než má ve „své“ soustavě, vůči níž je v klidu. V některých publikacích však chybí konkrétní popsání, že délka se mění pouze ve směru pohybu.

Jedinou výjimkou je kniha „*Albert Einstein - Teorie relativity pro každého*“. Námi posuzovaná kapitola by se dala spíše použít na ukázání historického vývoje, jako zajímavosti, ne však k vytvoření reálného pohledu na kontrakci délek.

Závěr

V úvodu bakalářské práce jsem odkazovala na článek Jureje I. Manina, kterým byla práce inspirována. Uváděl v něm, že hvězdy leží na Riemannově sféře a jejich převedení do roviny, tedy vlastně na případ, jak je vidíme my pouhým okem. Další podmínkou jeho úvahy je jejich pozorování v situaci, kdy se vůči nim pohybujeme téměř rychlostí světla. Tvrdí, že to vše se dá zakomponovat do celkem jednoduché lineární lomené funkce. V této práci se podařilo ukázat, že to tak opravdu funguje, alespoň pohybujeme-li se ve směrech jednotlivých os. V kapitole (5.3) je použito i otáčení směru pohybu o daný úhel a výsledkem byla opět lineárně lomená funkce, stejně tak, když jsme do sebe skládali v kapitole (5.4) transformace jednoho směru. Lomená funkce je tedy grupou vůči operaci skládání. Z tohoto předpokladu můžeme vyslovit závěr - transformace hvězd bude vždy lineární lomenou funkcí, ať se pohybujeme vesmírem kterýmkoli směrem.

Dále jsme zjistili, že transformace z Riemannovy sféry na Gaussovu komplexní rovinu jsou hyperbolické a mají vždy dva samodružné body. Ukázala jsem, jak se zdeformují souřadnice a objekty, pohybujeme-li se ve zvoleném směru.

Některé zde použité teorie jsem znala již ze svého dosavadního studia, například Speciální teorie relativity či komplexní čísla, s dalšími jsem se musela seznámit. Osobně mi tedy bakalářská práce přinesla znalost Lorentzových transformací, lineární funkce komplexní proměnné či konformního zobrazení.

V rámci své práce jsem pracovala s učebnicemi fyziky střední školy, proto jsme zařadili jejich řešerše. Co mě překvapilo v tomto ohledu je, že učebnice určené středním školám a gymnáziím má všechny pod záštitou nakladatelství „Prometheus“ a pokud nepočítáme jeho učebnice, nalezneme už jen dvě další z dnešní doby, které pojednávají o speciální teorii relativity.

Nedostatek času bohužel neumožnil uskutečnění poslední části zadání bakalářské práce, tedy vyšetření, jak se bude transformace konkrétně vypadat pro obecný pohyb a dále na nastudování Lorentzových grup. Toto téma mě však oslovilo a budeli to možné, ráda bych se jím případně zabývala i v diplomové práci.

Seznam použitých zdrojů

- [1] Československý časopis pro fyziku.
Česká republika: Akademie věd České republiky, 1986, č. 2. ISSN 0009-0700.
- [2] LEPIL, Oldřich, Milan Bednařík, Radmila Hýblová. *Fyzika II pro střední školy*.
Praha: Prometheus, 1993, ISBN 80-7196-185-X
- [3] PEŠKOVÁ, Eva a Hana Kropáčková: *Přehled středoškolské fyziky. Fyzika, univerzální příručka pro maturanty a uchazeče o studium na vysokých školách*.
Praha: Albra, 1995
- [4] Lorentzova transformace. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online].
San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2013-03-23]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Lorentzova_transformace
- [5] Lorentzova transformace a její důsledky. Gymnázium Ladislava Jaroše Holešov [online].
2009 [cit. 2013-03-23]. Dostupné z: <http://www.gymhol.cz/projekt/fyzika/17.lt/17.lt.htm>
- [6] BOBČEK, Leo, Břetislav NOVÁK, Josev POLÁK, Eva POMYKALOVÁ a Jura CHARVÁT.
Matematika pro gymnázia: Komplexní čísla.
3. vyd. Praha: Prometheus, spol. s r. o., 2006. ISBN 80-7196-187-6.
- [7] PRIVALOV, Ivan, Ivanovič: *Analytické funkce*.
Praha: Academia, 1955.
- [8] VESELÝ, Jiří. *Komplexní analýza*.
1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum, 2000, 244 s. ISBN 80-246-0202-4.
- [9] LITZMAN, Otto a Milan SEKANINA. *Užití grup ve fyzice*.
Praha: Academia, 1982.
- [10] BARTUŠKA, Karel. *Fyzika pro gymnázia: Speciální teorie relativity*.
3. vyd. Praha 4: Prometheus, spol. s r. o., 2005. ISBN 80-7196-209-0.
- [11] SVOBODA, Emanuel et al. *Přehled středoškolské fyziky*.
4. vyd. Praha 4: Prometheus, spol. s r. o., 2006. ISBN 80-7196-307-0.
- [12] TARÁBEK, Pavol. *Odmaturuj! z fyziky*.
Vyd. 1. Brno: Didaktis, 2004, 224 s. ISBN 80-862-8539-1.
- [13] LANK, Vladimír. *Fyzika v kostce*.
3. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2004, 120 s. ISBN 80-720-0968-0.

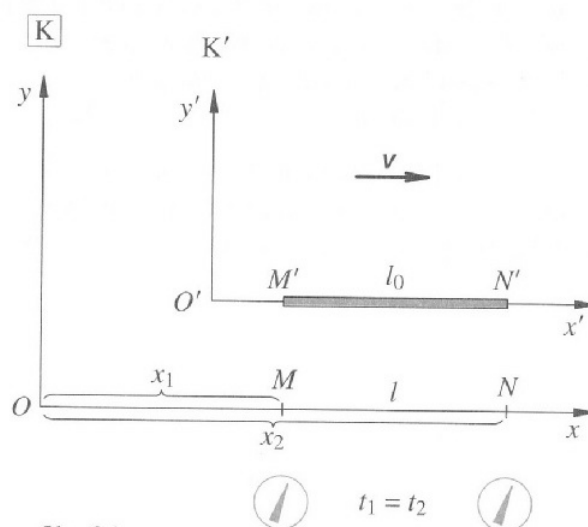
- [14] KARAMANOLIS, Stratis a Milan SEKANINA. *Albert Einstein - teorie relativity pro každého*.
1. vyd. Praha: Sdružení MAC, 1994, 95 s. ISBN 80-901-8390-5.

Seznam příloh

- [1]Fyzika pro gymnázia: Speciální teorie relativity
- [2]Přehled středoškolské fyziky
- [3]Fyzika II pro střední školy
- [4]Přehled středoškolské fyziky. Fyzika, univerzální příručka pro maturanty a uchazeče o studium na vysokých školách
- [5]Odmaturuj! z fyziky
- [6]Fyzika v kostce
- [7]Albert Einstein - teorie relativity pro každého

6 KONTRAKCE DÉLEK

Při měření délky určitého předmětu obvykle mlčky předpokládáme, že měřený předmět je v klidu vzhledem k vztažné soustavě, ve které je pozorovatel provádějící měření. Předpokládejme však, že tyč, jejíž délku měříme, je umístěna v klidu v soustavě K' , která se pohybuje vzhledem k soustavě K rychlostí v (obr. 6-1); osa x' je přitom rovnoběžná s osou x . Pozorovatel v soustavě K může změřit délku pohybující se tyče $M'N'$ tak, že vyznačí na ose x vhodnými značkami okamžité polohy koncových bodů M a N a délku tyče v soustavě K pak vypočte jako vzdálenost $l = MN$ okamžitých poloh obou jejich konců.



Obr. 6-1

Přitom je však nutné, aby poloha bodů M a N byla v soustavě K vyznačena současně. Vytvoření značek M a N na ose x soustavy K jsou však dvě události současné jen z hlediska pozorovatele v soustavě K . Tyto události již nejsou současné z hlediska pozorovatele v soustavě K' , která se vzhledem k soustavě K pohybuje rychlostí v . Pozorovatel v této soustavě, který by sledoval vytváření značek v soustavě K , by konstatoval, že značky M a N na ose x nebyly vytvořeny současně, ale postupně za sebou, neboť současnost

dvou událostí je relativní pojem (viz kap. 4). V důsledku toho by pozorovatel v soustavě K' nepovažoval vzdálenost MN za délku tyče ve své soustavě.

Tato úvaha ukazuje, že nemá smysl hovořit o „měření délky pohybující se tyče“ bez udání vztažné soustavy, k níž proces měření délky vztahujeme.

Poněvadž měření délky pohybující se tyče vyžaduje současné určení poloh koncových bodů měřeného předmětu a současnost událostí je relativní pojem, je rovněž délka předmětu relativní pojem (vzhledem k volbě vztažné soustavy).

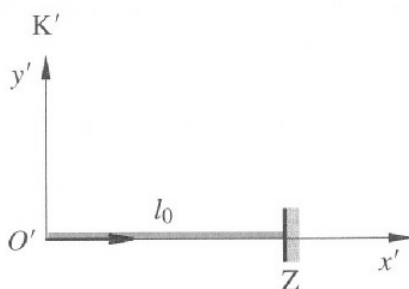
Odvození vztahu pro kontrakci délek

K odvození vztahu mezi délkou předmětu l_0 v klidové soustavě K' (klidovou délkou) a délkou předmětu l v libovolné jiné inerciální soustavě K můžeme využít myšlenkový pokus.

Předpokládejme proto, že z levého konce tyče (z bodu O' – viz obr. 6-2) vyšleme ve směru jejího pohybu světelný signál; světlo se po odrazu od zrcátka Z umístěného na druhém konci tyče vrátí zpět do bodu O' .

V klidové soustavě K' je doba t' , za niž světlo urazí dráhu $O'ZO'$, dána vztahem

$$t' = \frac{2l_0}{c}.$$



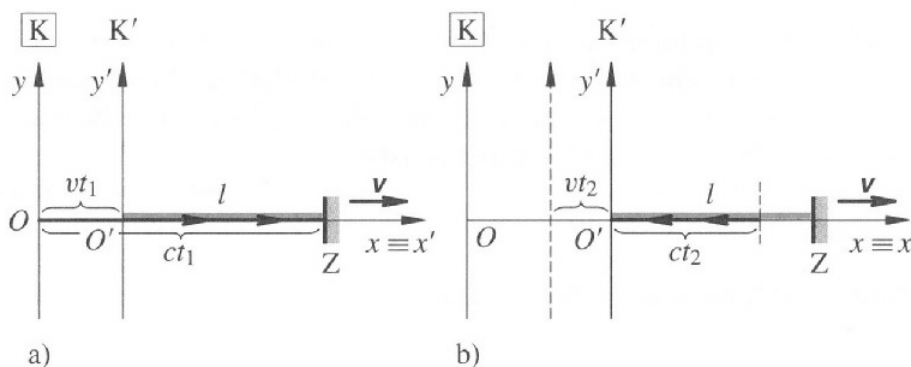
Obr. 6-2

V soustavě K se světlo šíří od levého konce tyče k zrcátku Z po dobu t_1 (obr 6-3a) a urazí při tom dráhu

$$ct_1 = vt_1 + l,$$

kde l je délka tyče v soustavě K . Při návratu paprsku k levému konci tyče (obr. 6-3b) urazí světlo vzhledem k soustavě K dráhu

$$ct_2 = l - vt_2.$$



Obr. 6-3

Z obou posledních vztahů dostáváme pro dobu t , za niž urazí světlo v soustavě K dráhu od levého konce tyče k zrcátku a nazpět, výraz

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}.$$

Emise světla z bodu O' a zpětný návrat světla do bodu O' jsou z hlediska pozorovatele soustavy K' dvě soumísné události oddělené časovým intervalem t' (viz obr. 6-2); z hlediska pozorovatele v soustavě K uplynula mezi těmito událostmi doba $t > t'$. Mezi dobou t a t' platí vztah pro dilataci času

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

z něhož po dosazení za t a t' dostaneme

$$\frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{\frac{2l_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a po úpravě

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Tento vztah mezi délkou tyče l_0 v klidové soustavě K' a délkou tyče l v soustavě K , vzhledem k níž se tyč pohybuje rychlostí $v < c$, nazýváme **vztah pro kontrakci délek**.

Z nerovnosti $v < c$ a ze vztahu pro kontrakci délek vyplývá

$$0 < \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1; \quad l < l_0.$$

Délka tyče l v soustavě, vzhledem k níž se tyč pohybuje rychlostí v , je tedy vždy menší než délka téže tyče l_0 v soustavě klidové. Tento jev se nazývá kontrakce délek.

Poznámky

1. Pro $v \ll c$ ze vztahu pro kontrakci délek dostaneme $l \approx l_0$.
2. Lze dokázat, že rozměry tělesa kolmé k vektoru jeho rychlosti se nezkracují.

6

Příklad 1

Jakou rychlostí se vzdaluje od Země raketa, jestliže pro pozorovatele na Zemi je její délka ve srovnání s délkou klidovou poloviční?

Řešení

$$l = \frac{l_0}{2}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad v = ?$$

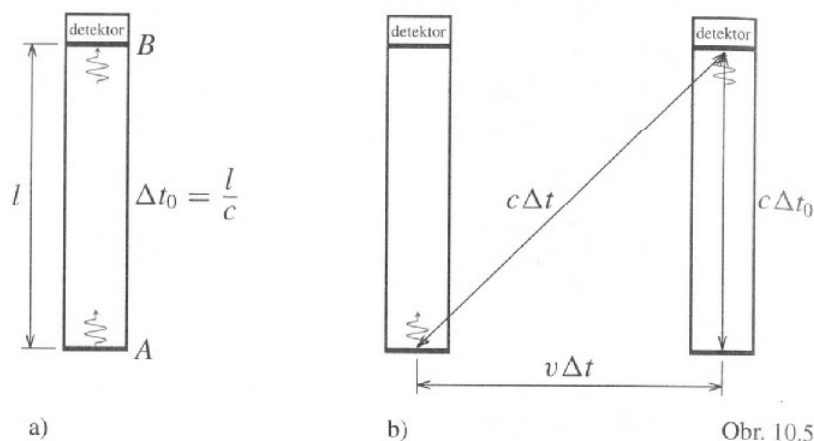
Podle vztahu pro kontrakci délek platí

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

kde l_0 je délka rakety v její klidové vztažné soustavě a l délka rakety vzhledem k Zemi. Poněvadž $l = \frac{l_0}{2}$, dostáváme po dosazení

$$\frac{l_0}{2} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

pozorovatel v klidu. Tomuto poznatku lépe porozumíme na základě následujícího myšlenkového pokusu.



Obr. 10.5

Budeme uvažovat trubici délky l , na jejímž jednom konci (bod A na obr. 10.5a) je zdroj světelných záblesků a na druhém konci (bod B) je zařízení, které záblesky registruje. Jestliže bude trubice v klidu, dospěje světelný záblesk z bodu A do bodu B za dobu

$$\Delta t_0 = \frac{l}{c}.$$

Jestliže se však trubice bude pohybovat rychlostí v ve směru kolmém k ose trubice (obr. 10.5b), musí světelný záblesk urazit delší dráhu $c\Delta t$, než dospěje do bodu B . Současně trubice urazí vzdálenost $v\Delta t$. Pomocí Pythagorovy věty můžeme podle obr. 10.5b sestavit rovnici

$$c^2(\Delta t)^2 = v^2(\Delta t)^2 + c^2(\Delta t_0)^2$$

odkud

$$(\Delta t)^2(c^2 - v^2) = c^2(\Delta t_0)^2.$$

Po úpravě dostaneme vztah, který ukazuje, že v pohybující se vztažné soustavě došlo k prodloužení čili k dilataci časového intervalu Δt , za který světlo z bodu A dospělo do bodu B :

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Je třeba připomenout, že rozdíl v časových intervalech se projeví jen v případě, že se vztažná soustava pohybuje rychlostí blížíící se rychlosti světla c . Přesto již byla dilatace času potvrzena experimenty. Nejznámější je zjištění, že tzv. doba života částic (mezonů π^+) závisí na jejich rychlosti. Pokusy prováděnými na urychlovačích částic bylo prokázáno, že částice se pohybuje rychlostí blížíící se rychlosti světla ($0,99c$) a za dobu života (tzn. než dojde k její přeměně na jiné částice) urazí větší vzdálenost, než by vyplývalo ze zákonů klasické mechaniky.

Kontrakce délek

Podobným jednoduchým modelovým experimentem můžeme nalézt vztah pro určení délky tyče, jejíž podélná osa má směr, kterým se vztažná soustava pohybuje. V tomto případě dospíváme k závěru, že tyč, která má ve vztažné soustavě, vzhledem k níž je v klidu, délku l_0 , má ve vztažné soustavě pohybující se velkou rychlostí v délku l , pro kterou platí

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že u tyče došlo ve směru její podélné osy ke zmenšení čili ke kontrakci délky.

Skládání rychlostí ve speciální teorii relativity

Na začátku kapitoly jsme ukázali, jak se skládají rychlosti v klasické mechanice. Ve speciální teorii relativity však tento postup není možný, poněvadž rychlost světla c je nejvyšší rychlost v libovolné inerciální vztažné soustavě.

Pro tento případ Einstein odvodil **relativistický zákon skládání rychlostí**. Když se těleso pohybuje ve vztažné soustavě S' rychlostí u' v kladném směru osy x a současně se vztažná soustava S' pohybuje vzhledem k jiné soustavě S rychlostí v ve stejném směru, pak se těleso vzhledem k soustavě S pohybuje rychlostí u pro kterou platí

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$

Snadno bychom dokázali, že výsledná rychlost u je menší než součet obou rychlostí $u' + v$. Zkuste např. dosadit $u' = v = (2/3)c$:

$$u = \frac{\frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c}{1 + \frac{\frac{2}{3}c \cdot \frac{2}{3}c}{c^2}} = 0,92c$$

26. 5. KONTRAKCE (ZKRACOVÁNÍ) DÉLEK

V inerciální soustavě K' , která se pohybuje konstantní rychlostí $v \rightarrow c$, je ve směru osy x , x' umístěna tyč o délce $l' = x_2' - x_1'$.

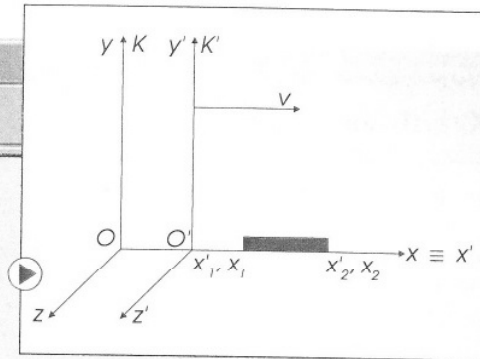
Pozorovatel v soustavě K' nemusí měřit souřadnice x_1' , x_2' , současně (tyč je vzhledem k soustavě v klidu).

Pozorovatel v inerciální soustavě K však musí souřadnice změřit současně, protože tyč se vzhledem k němu pohybuje a souřadnice x_2 a x_1 se neustále mění.

Pro délku tyče l (měřeno v soustavě K) lze odvodit vztah:

$$l = l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Pozorovatel v soustavě K naměří délku kratší než pozorovatel v soustavě K' ; $l < l'$.



26. 6. SKLÁDÁNÍ RYCHLOSTÍ

Inerciální soustava K' se pohybuje rovnoměrně přímočaře vzhledem k inerciální soustavě K rychlostí v .

V soustavě K' se pohybuje částice rychlostí u' ve směru osy x' . Jakou rychlostí se částice pohybuje vzhledem k soustavě K ?

Pokud by částicí byl foton ($u' = c$), pak podle klasické fyziky $u = c + v$, což je v rozporu s principem konstantní rychlosti světla.

Einstein odvodil vztah:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Je-li $u' = c$, pak $u = c$, což odpovídá principu konstantní rychlosti světla.

26. 7. RELATIVISTICKÁ HMOTNOST

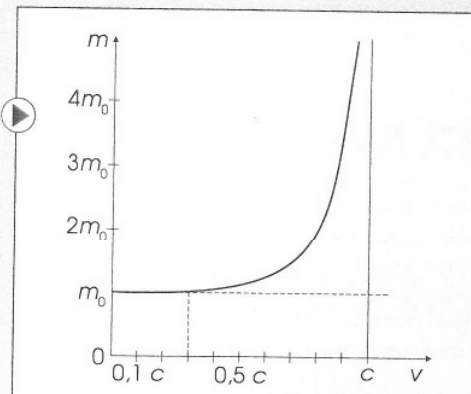
Klasická fyzika – hmotnost tělesa je konstantní, nezávislá na jeho rychlosti.

STR – hmotnost každého tělesa se s rostoucí rychlostí zvětšuje podle vztahu:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

m – relativistická hmotnost tělesa

m_0 – klidová (vlastní) hmotnost tělesa



Jestliže $v \rightarrow c$, pak se hmotnost tělesa zvětšuje nad všechny meze a konstantní síla uděluje tělesu stále menší zrychlení \Rightarrow těleso s $m_0 \neq 0$ nemůže dosáhnout rychlosti světla ve vakuu.

Vztah pro relativistickou rychlost byl mnohokrát ověřen v urychlovačích částic. Např. urychlovač ve Stanfordu v USA urychlí elektrony na rychlost, při níž mají 40 000 krát větší hmotnost než když jsou v klidu.

Příloha 5

Kinematické důsledky speciální teorie relativity jsou relativnost současnosti, dilatace času, kontrakce délek, relativistické skládání rovnoběžných rychlostí.

Relativnost současnosti: jestliže $t_2 = t_1$ (tj. události jsou současné vzhledem k S) a $x_2 - x_1 \neq 0$ (události nejsou souměstné), pak pro časový interval $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ platí:

$$\Delta t' = -\frac{v}{c^2} \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{události v soustavě } S' \text{ nejsou současné})$$

Vztah pro $\Delta t'$ snadno dokážete z Lorentzových transformačních rovnic.

Dilatace času: (zpomalení chodu hodin při relativním pohybu)

Opět z Lorentzových transformací snadno dokážeme, že

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{kde } t' \text{ je doba trvání děje v soustavě } S' \text{ v místě } x'_1 = x'_2 = x',$$

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{je doba, kterou naměří například kosmonaut v raketě pohybující}$$

se rychlostí v vzhledem k Zemi.

Kontrakce délek (zkrácení délek ve směru pohybu):

$$\text{Platí: } l = l'_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

kde l'_0 je délka $x'_2 - x'_1$ v soustavě S' za předpokladu současného měření souřadnic koncových bodů, l je délka $x_2 - x_1$ v soustavě S .

Kontrakci délky lze pozorovat jen u rozměrů ve směru pohybu, ostatní rozměry zůstanou nezměněny.

Relativistické skládání rovnoběžných rychlostí:

Z hlediska klasické mechaniky víme, že $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$ a $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$, kde \vec{u} je vektor rychlosti v soustavě S a \vec{u}' je vektor rychlosti \vec{v} v soustavě S' . Relativistické vztahy vzhledem k platnosti druhého Einsteinova postulátu musí být jiné. Opět pomocí Lorentzových transformací snadno dokážeme, že

$$\vec{u} = \frac{\vec{u}' + \vec{v}}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad \text{a} \quad \vec{u}' = \frac{\vec{u} - \vec{v}}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Relativistická dynamika: - hmotnost relativistická,

- hybnost,

- kinetická energie.

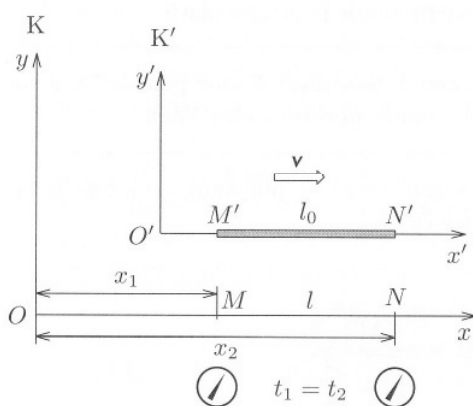
Proč musí být relativistická hmotnost jiné než klasická?

Vezměme platnost druhého pohybového zákona: $\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{\vec{v}}{t}$. Je-li $\vec{F} = \text{konst.}$,

Vzhledem k tomu, že $v < c$, platí $0 < \sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$. Ze vztahu pro dilataci času pak dostáváme $\Delta t > \Delta t'$. Zpomalení chodu pohybujících se hodin H' vzhledem k hodinám H_1 a H_2 , které jsou v soustavě K v klidu, ilustruje obr. 7-2.

3. Kontrakce délek

Při měření délky tyče pohybující se vzhledem k soustavě K (obr. 7-3) musíme na ose x v soustavě K vymezit vhodnými značkami okamžité polohy koncových bodů M a N a délku tyče v soustavě K pak vypočítat jako vzdálenost $l = |MN|$ okamžitých poloh jejich konců. Přitom je však nutné, aby poloha bodů M a N byla v soustavě K vyznačena **současně**.



7-3 Měření délky pohybující se tyče

Poněvadž měření délky pohybující se tyče vyžaduje současně určení poloh koncových bodů měřeného předmětu a současnost událostí je relativní pojem, je rovněž délka předmětu relativní pojem vzhledem k volbě vztažné soustavy. Jedna a tatáž tyč má v různých navzájem se pohybujících vztažných soustavách různou délku.

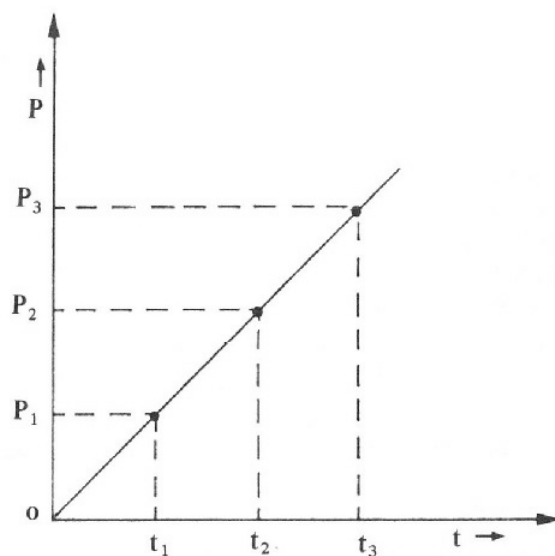
Vztah mezi vlastní délkou tyče l_0 (tj. délkou tyče vzhledem k soustavě K' , v níž je tyč v klidu) a délkou tyče l v soustavě K , vzhledem k níž se tyč pohybuje rychlostí $v < c$, nazýváme **vztah pro kontrakci délek**. Tento vztah lze vyjádřit ve tvaru

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Z nerovnosti $v < c$ a ze vztahu pro kontrakci délek vyplývá

$$0 < \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1; \quad l < l_0.$$

storově a časově navzájem posunutým. Z toho vyplývá, že prostor a čas nemohou být posuzovány navzájem odděleně, jak to po staletí činila klasická fyzika. Tyto veličiny tvoří spíše integrovaný celek, jakési čtyřrozměrné časoprostorové kontinuum s libovolným množstvím sousedících událostí, tzv. „množinu“, označovanou tvůrcem časoprostorového kontinua, matematikem Hermannem Minkowskim, jako „svět“. „Od tohoto okamžiku má samotný čas a samotný prostor ustoupit zcela do pozadí a pouze jednota obou si má zachovat samostatnost.“ Tak zní deviza moderního fyzikálního světového názoru, pocházející rovněž z pera Minkowského.



Obr. 19: K vysvětlení pojmu „kontinuum časoprostoru“.

2.6 Délková, případně Lorentzova kontrakce

Při popisu Michelsonova-Morleyova pokusu jsme zjistili pro časy t_1 a t_2 následující hodnoty:

$$t_1 = \frac{2L_1}{c} \cdot \frac{1}{1 - (v/c)^2} \quad \text{případně} \quad t_2 = \frac{2L_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

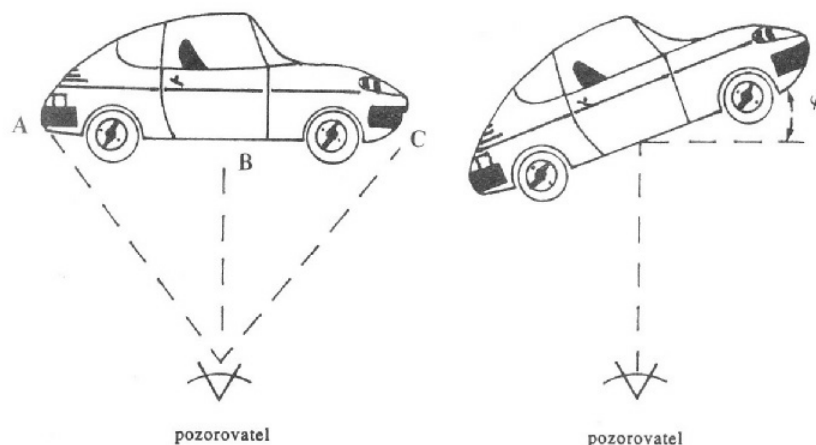
Protože výsledek pokusu byl negativní, tzn. nebyl zjištěn rozdíl $\Delta t = t_2 - t_1$, bylo nutno předpokládat, že $t_1 = t_2$. To však znamenalo, buď se zcela vzdát teorie éteru, anebo nalézt přijatelné vysvětlení pro bezvýslednost pokusu. K odhodlaným bojovníkům za teorii éteru patřil, jak jsme již poznali, také Lorentz, který, aby udržel domněnku o existenci éteru při životě, vyslovil hypotézu, že všechna tělesa se smršťují za svého pohybu éterem, čímž se průběžný čas t_1 ve směru pohybu zkracuje. Za předpokladu, že dojde ke smrštění o faktor $\sqrt{1 - (v/c)^2}$, je potom

$$t_1 = \frac{2 L_1}{c} \cdot \frac{1}{1 - (v/c)^2} = t_2$$

Tato hypotéza byla vytvořena v roce 1895, tedy deset let předtím, než Einstein převzal Lorentzovy transformace do koncepce své speciální teorie relativity. Z tohoto důvodu je délková kontrakce v rámci teorie relativity známa také jako Lorentzova kontrakce. Nezávisle na označení vyjadřuje předpoklady, že se délky se vzrůstající rychlostí zdají celkově kratší o faktor $\sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Těleso o délce L_0 ve stavu klidu se podle této hypotézy zdá mít ve stavu pohybu délku $L' = L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Jedná se tedy o optický jev, který má mimo jiné za následek to, že například pohybující se koule se stává ve směru svého pohybu ko-



Obr. 20: Pohyblivé objekty se nezdají kratší, ale pootočené o úhel φ , závisející na rychlosti pohybu.

události, k nimž dochází ve vztažných soustavách, nacházejících se ve vzájemném relativním pohybu. Nejdůležitější z těchto důsledků se týká pojmu „čas“, který ztrácí charakter absolutní veličiny. Namísto absolutního času, jak jej známe z klasické fyziky, nastupuje čas relativní, závisející na relativní rychlosti příslušné vztažné soustavy. Všimněme si nyní obou vztažných soustav BS_1 a BS_2 na obr. 21. BS_2 se opět pohybuje rychlostí v vzhledem k BS_1 . Vztah času t vztažné soustavy BS_1 k času t' vztažné soustavy BS_2 je možno nepřímo zjistit s ohledem na invarianci rychlosti světla c a pomocí již uvedeně Lorentzovy kontrakce. Vycházíme opět ze skutečnosti, že vztažná soustava BS_2 se pohybuje paralelně k ose x vztažné soustavy BS_1 , takže osy y a z nemusíme uvažovat. Mezi dráhou S , rychlostí v a časem t existuje známý jednoduchý vztah

$$S = v \cdot t \quad \text{případně} \quad \frac{S}{t} = v$$

Použije-li se tento vztah pro klidovou vztažnou soustavu BS_1 potom podobně platí pro pohybující se vztažnou soustavu BS_2 vztah

$$S' = v \cdot t' \quad \text{případně} \quad \frac{S'}{t'} = v$$

Platí tedy, že

$$\frac{S}{t} = \frac{S'}{t'}$$

Protože se však dráha S' zdá být na základě Lorentzovy kontrakce zkrácena oproti dráze S o faktor $\sqrt{1 - (v/c)^2}$, musí být čas t' oproti času t pomalejší o stejný faktor, tzn.

$$t' = t \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

Znamená to, že čas t' pohybující se vztažné soustavy probíhá o faktor $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ pomaleji, než čas t vztažné soustavy BS_1 v klidu. Jinak řečeno, vzniká takzvaná dilatace času. Co se za tímto jevem skrývá? Je možno skutečně pomocí rychlosti zpomalit čas a tímto způsobem provádět například „omlazovací kúry“? Takové a podobné otázky byly neustále kladeny již v době objevení speciální teorie relativity. Zatímco někteří fyzikové zastávali názor, že nad časem je skutečně možno „zvítězit“, jiní se domnívali, že časová dilatace má pouze teoretický charakter, avšak žádný praktický význam.

Dilatace času

DILATACE ČASU je relativistické zpomalení chodu hodin, které se vzhledem k pozorovateli pohybují. Pozorovatel P pozoruje určitý děj ve vztažné soustavě S' , která se vzhledem k soustavě S pohybuje rychlostí \vec{v} . Pozorovatel P naměří dobu trvání tohoto děje Δt . Pozorovatel P' nacházející se v soustavě S' naměří dobu trvání téhož děje $\Delta t'$. Pro naměřené doby platí $\Delta t' < \Delta t$ a dále vztah:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ kde } c \text{ je velikost rychlosti světla.}$$

DILATACE ČASU znamená, že časový interval Δt mezi dvěma nesoumístnými událostmi je vždy delší než časový interval $\Delta t'$ mezi těmito událostmi měřený pozorovatelem, pro kterého jsou obě události soumístné. Z hlediska pozorovatele P jsou události „vyslání světelného signálu“ a „přijetí světelného signálu“ nesoumístné, z hlediska pozorovatele P' jsou tyto události soumístné.

Dilatace času byla v r. 1971 ověřena pomocí atomových hodin, které byly přenášeny letadlem kolem Země a vzhledem k hodinám na Zemi se zpozdily o 203 ns.

Pro rychlosti v mnohem menší, než je rychlost světla c , je $t \approx t'$, čili v klasické (newtonovské) mechanice, kde pracujeme s malými rychlostmi, můžeme předpokládat, že čas plyne ve všech inerciálních soustavách stejně.

Kontrakce délky

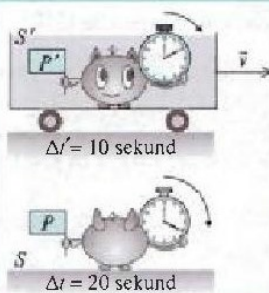
KONTRAKCE DÉLKY neboli relativistické zkrácení délky předmětu v pohybující se soustavě je dalším relativistickým jevem, je však pozorovatelný pouze u rozměrů ve směru pohybu, ostatní rozměry zůstanou nezměněny. Pozorovatelé pozorují tyč v pohybující se inerciální soustavě. Délka tyče měřená pozorovatelem, vzhledem k němuž je tyč v klidu, je l' , délka měřená pozorovatelem, vzhledem k němuž se tyč pohybuje, je l .

Platí $l < l'$ a velikost zkrácení je dána vztahem:

$$l = l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \text{ kde } v \text{ je velikost rychlosti pohybující se}$$

soustavy, c je rychlost světla.

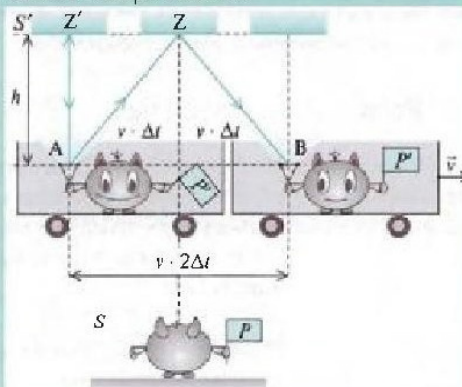
Pro rychlosti $v \ll c$ platí $l \approx l'$, čili v klasické (newtonovské) mechanice, kde pracujeme s malými rychlostmi, můžeme předpokládat, že rozměry fyzikálních objektů jsou ve všech inerciálních soustavách stejné.



DILATACE ČASU

Hodiny pohybující se vzhledem k pozorovateli P jdou z jeho pohledu pomaleji než hodiny, které jsou vzhledem k tomuto pozorovateli v klidu.

Odvození vztahu pro dilataci času



Soustava S' se pohybuje rychlostí v . Pozorovatel P' vyšle světelný signál kolmo na směr pohybu, který se odrazí od zrcátka a vrátí se zpět za čas $2\Delta t' = \frac{2h}{c}$, z čehož plyne $c \cdot \Delta t' = h$. Z hlediska pozorovatele P , vzhledem k němuž se soustava S' pohybuje, projde světelný signál dráhu AZB rovnu

$2\sqrt{h^2 + (v \cdot \Delta t)^2}$, kde $2\Delta t$ je čas naměřený pozorovatelem P . Protože i v jeho soustavě se světlo pohybuje rychlostí c , platí $c \cdot 2\Delta t = 2\sqrt{h^2 + (v \cdot \Delta t)^2}$. Dosazením za h obdržíme vztah $c \cdot \Delta t = \sqrt{(c \cdot \Delta t')^2 + (v \cdot \Delta t)^2}$, z čehož plyne vztah pro dilataci času.

KONTRAKCE DÉLKY

